標準正規分布に従う独立な確率変数の冪乗和に関する積分公式

小山民雄 (神戸大学)

1　確率変数の冪乗和

確率変数の列 $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ は、独立同分布で、各 X_i は標準正規分布に従うものとする。自然数 k と d を固定する。確率変数 X_i の冪乗和 $X := \sum_{i=1}^k X_i^d$ の確率関数は

$$F(c) := \mathbf{P}\left(X < c\right) = \int_{\sum_{i=1}^k x_i^d < c} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k x_i^2\right) dx_1 \dots dx_k$$

と表され、確率密度関数は $f := \frac{dF}{dc}$ で与えられる。

$d = 2$ の場合、冪乗和 X は自由度 k のカイ二乗統計量にしたがう。この確率の数値計算は、平均と分散が既知の場合における分布の正規性の統計的検定に応用することができ、文献 [2] では、冪乗和 X の確率密度関数の数値計算を、$d = 3$ の場合にホロノミック勾配法によるアプローチで行なっている。ここでは、一般の $d \geq 3$ について、冪乗和 X の確率関数 $F(c)$ や確率密度関数 $f(c)$ の数値計算について考えたい。

2　主結果

佐藤超函数のフーリエ変換の理論 [3] を用いることで、次の命題を得る:

Proposition 1. 冪乗和 X の確率密度関数 $f(x)$ について、等式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\gamma_{-\varepsilon}} e^{-ixt}\hat{f}(t)^k dt - \int_{\gamma_{\pi+\varepsilon}} e^{-ixt}\hat{f}(t)^k dt\right) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つ。ここで $\gamma_\theta\,(\theta \in \mathbf{R})$ は $\gamma_\theta(t) := te^{i\theta}\,(0 < t < \infty)$ で定義される積分路で、$\varepsilon > 0$ は十分小さいとする。また、$\hat{f}(t) := \int e^{ixt} f(x) dx$ は $f(x)$ のフーリエ変換で、複素領域での値は実軸からの解析接続によって与えるものとする。

References

[1] T. Koyama, An integral formula for the powerd sum of the independent, identically and normally distributed random variables. `https://arxiv.org/abs/1706.03989`, June 2017.

[2] N. Marumo, T. Oaku, and A. Takemura. Properties of powers of functions satisfying second-order linear differential equations with applications to statistics. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 32:553–572, July 2015.

[3] M. Sato. Theory of hyperfunctions. *Sûgaku*, 10:1–27, 1958. in Japanese.