

Navier-Stokes 方程式の非粘性極限と境界層の安定性について

前川 泰則

京都大学大学院理学研究科数学教室

maekawa@math.kyoto-u.ac.jp

本講演では 2 次元半空間における Navier-Stokes 方程式の非粘性極限問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t v + v^\nu \cdot \nabla v^\nu - \nu \Delta v^\nu + \nabla q^\nu = g^\nu, & t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{T}_\kappa \times \mathbb{R}_+, \\ \operatorname{div} v^\nu = 0, & t \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{T}_\kappa \times \mathbb{R}_+, \\ v^\nu|_{y=0} = 0, & v^\nu|_{t=0} = v_0^\nu. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{R}/(2\pi\kappa)\mathbb{Z}$, $\kappa > 0$, $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ であり、 $v^\nu = (v_1^\nu, v_2^\nu)$ と q^ν は流体の速度場と圧力場を表す。正定数 ν は流体の動粘性係数を表す。 g^ν は外力、 v_0^ν は初期速度場であり、壁面 $y = 0$ での境界条件は古典的な noslip 境界条件である。本講演では非粘性極限 $\nu \rightarrow 0$ における shear 型境界層 $(U(\frac{y}{\sqrt{\nu}}), 0)$ の安定性について、これまで得られた結果を概観したい。

正定数 ν が小さいときの解 v^ν の挙動を調べることは重要な問題であり、流体力学における古典的な研究テーマである。形式的には方程式 (1) において $\nu = 0$ とした Euler 方程式の解に近づくと考えられるが、Euler 方程式においては速度場の境界に対する接方向成分 ((1) では速度場の第 1 成分) に対しては境界条件を課することはできず、Euler 方程式の解は一般に noslip 境界条件を満たさない。そのため、(1) の解は境界付近において極限方程式との境界条件の discrepancy を反映した境界層の構造を持つことが期待される。このような境界層の概念と境界層を記述する方程式の導出は Prandtl [11] によって与えられ、今日に至るまで多くの研究がなされている。形式的に見積もられる境界層の厚みは $O(\sqrt{\nu})$ であり、 v^ν の漸近形は

$$\begin{aligned} v^\nu(t, x, y) &\sim (V_1(t, x, \frac{y}{\sqrt{\nu}}), \sqrt{\nu}V_2(t, x, \frac{y}{\sqrt{\nu}})) \quad \text{near the boundary,} \\ v^\nu(t, x, y) &\sim v^0(t, x, y) \quad \text{away from the boundary,} \end{aligned} \quad (2)$$

と予想される。ここで、 $V = (V_1, V_2)(x, Y)$ は境界層の変数 $Y = y/\sqrt{\nu}$ に依存する速度場であり、上記の ansatz を (1) に代入して導出される Prandtl 方程式の解で与えられることが期待される。また、自然な接合条件として、 V は $Y \rightarrow \infty$ において Euler 方程式の解 v^0 (outer flow と呼ばれる) の境界値 $v^0|_{y=0}$ を取らなければならないことに注意する。

Navier-Stokes 方程式の解に対して (2) の ansatz を数学的に正当化するためには、

- (i) Euler 方程式を解く (outer flow の主要部の構成)
- (ii) Prandtl 方程式を解く (境界層の主要部の構成)
- (iii) Remainder 項の評価 (境界層の安定性)

の三つのステップが必要である。付与データが十分な Sobolev クラスの正則性を持っていれば (i) については困難なく解くことができる。その一方で、(ii) と (iii) については対象となる方程式それぞれに微分損失構造が現れ、Sobolev クラスの枠組みで解くことは難しいことが知られている。まず、(ii) については付与データが適当な単調性条件を満たせば Sobolev クラスにおける Prandtl 方程式の局所解の一意存在が成り立つ (Oleinik and Samokhin [10])。単調性条件が成り立たない場合、Sobolev クラスで Prandtl 方程式を解くことは期待できない。実際、単調でない shear 型境界層のまわりで Prandtl 方程式を線形化すると、非定常の線形化問題には接方向変数 x の高周波領域における不安定性 (Gevrey 指数 2 に相当する微分損失) が現れることが知られている (Gerard-Varet and Dormy [1])。付与データが接方向変数 x について解析的な正則性を持つ場合には、微分損失を解析的な正則性で補うことができ、時間局所解の一意存在が示される。また、最近 Gerard-Varet and Dietert [3] によって、指数 2 の Gevrey クラスにおける Prandtl 方程式の時間局所一意可解性が示されている。

Prandtl 方程式を解くことで境界層の主要部（と期待される）が構成されたとして、実際に “Euler 方程式の解+Prandtl 方程式の解+remainder” の形で Navier-Stokes 方程式の解を構成できるか、というのが (iii) のステップであり、これは本質的に境界層の安定性の問題となる。「Prandtl 方程式が解けている状況であれば remainder のコントロールは何とかできるのではないか」と期待したいものの、高周波における不安定性（微分損失）が最も強く現れるのはこの (iii) のステップである。実際、境界層が単調性条件を満たす（したがって Prandtl 方程式のレベルでは可解性が成り立つ）場合でも、境界層が凸性を有しない場合には、一般に Gevrey 指数 1 に相当する微分損失が生じ、Prandtl 境界層展開が Sobolev クラスでは成り立たないことが Grenier [5] によって指摘された。したがって、一般に Prandtl 境界層展開 (2) を正当化するためには付与データに対して少なくとも境界付近において解析的な正則性が要求される (Sammartino and Caflisch [12, 13], M. [9])。その一方で、単調でかつ凸性を持つ境界層は物理的に自然な対象であり、このような形状の境界層周りでは状況が改善されることが期待される。なお、Grenier [5] の議論では、凸でない shear flow が Euler 方程式の解として不安定であることが本質的に用いられていることに注意する。そのため、Euler 方程式の解として中立安定であるような、凸性を有する shear type の境界層の安定性は全く別の枠組みとなる。

残念ながら、単調かつ凸のよい形状と思われる境界層周りでも、やはり高周波不安定性が生じる。これは Tollmien-Schlichting 不安定性と呼ばれるもので、流体力学では 20 世紀半ば頃には既に理論や実験等で知られており、微小な粘性項と noslip 境界条件に起因する generic な不安定性である (例えば Drazin and Reid [7] に詳しい)。より具体的には、固定壁における noslip 境界条件のもと、shear flow 周りで Navier-Stokes 方程式の線形化方程式を考えたとき、高い Reynolds 数において generic に現れる線形不安定性が Tollmien-Schlichting 不安定性である。興味深い特徴として、線形化方程式から微分の最高階である粘性項を取り除くと一般には現れない不安定性であり、この意味で微小粘性による拡散効果が trigger となる不安定性といえる。数学的に厳密にこの不安定性が示されたのは最近である (Grenier, Guo, and Nguyen [6])。特に、Prandtl 境界層展開の正当化という枠組みの中で、Tollmien-Schlichting 不安定性が具体的にどのような困難を与えるかが数学的に明確に理解されたのはここ 2, 3 年といってよいと思われる。実際、境界層展開を示す上での数学的な困難は微分損失であるので、Tollmien-Schlichting 不安定性による最も悪い不安定性の出方がどのような微分損失に対応するのかを見積もる必要がある。このような観点から、Gerard-Varet, M., and Masmoudi [2] において、Tollmien-Schlichting 不安定性（の微分損失の意味で最も悪いモード）が Gevrey 指数 $\frac{3}{2}$ の微分損失に対応することが指摘され、さらに、単調で凸な shear 型境界層の周りでは指数 $\frac{3}{2}$ の Gevrey クラスにおいて実際に Prandtl 境界層展開が成り立つことが示された。

以上のように、Prandtl 境界層展開を実際に正当化しようとする、shear 型の単純な境界層の周りであっても高周波における強い不安定性と直面することになる。一方、ステップ (iii) における Tollmien-Schlichting 不安定性や Grenier が [5] で与えた不安定性は実は time frequency と深く結びついており、非定常問題特有の困難と考えられる。そのため、定常問題であれば Sobolev クラスにおいて (iii) のステップが解決されることが期待される。実際、Gerard-Varet and M. [4] において、逆流の無い shear 型境界層周りでの定常 Navier-Stokes 方程式の線形化問題が Sobolev クラスで可解であることが示され（上述したように非定常問題ではこれは不可能である）、これにより適当な外力項の付いた定常 Navier-Stokes 方程式の解が shear 型境界層の周りで構成された。さらに、Blasius 境界層を含むより一般の枠組みにおける定常問題に対する結果が Guo and Iyer [8] で報告されている。

本講演では上述のような研究の背景を紹介しつつ、[2] と [4] の結果に焦点を当てたい。

References

- [1] Gerard-Varet, D., Dormy, E.; On the ill-posedness of the Prandtl equation. *J. Am. Math. Soc.*, 23(2):591-609, 2010.
- [2] Gerard-Varet, D., Maekawa, Y., and Masmoudi, N.; Gevrey stability of Prandtl expansions for 2D Navier-Stokes flows. *Duke Math. J.*, 167(13): 2531-2631, 2018.
- [3] Dietert, H., and Gerard-Varet, D.; Well-posedness of the Prandtl equation without any structural assumption. *arXiv:1809.11004*.
- [4] Gerard-Varet, D., and Maekawa, Y.; Sobolev stability of Prandtl expansions for the steady Navier-Stokes equations. *arXiv:1805.02928*.
- [5] Grenier, E.; On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(9):1067-1091, 2000.
- [6] Grenier, E., Guo, Y., and Nguyen, T.; Spectral instability of characteristic boundary layer flows. *Duke Math. J.*, 165:3085-3146, 2016.
- [7] Drazin, P. G., and Reid, W. H.; *Hydrodynamic stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. With a foreword by John Miles.
- [8] Guo, Y., and Iyer, S.; Validity of steady Prandtl layer expansions. *arXiv:1805.05891*
- [9] Maekawa, Y.; On the inviscid limit problem of the vorticity equations for viscous incompressible flows in the half plane, *Comm. Pure and Applied Math.*, 67 (2014) 1045-1128.
- [10] Oleinik, O. A., and Samokhin, V. N.; *Mathematical models in boundary layer theory*, volume 15 of Applied Mathematics and Mathematical Computation. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [11] Prandtl, L.; Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Verh. III Intern. Math. Kongr. Heidelberg*, 1904, pp. 485-491.
- [12] Sammartino, M., and Caffisch, R. E.; Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space. I. Existence for Euler and Prandtl equations. *Comm. Math. Phys.*, 192(2):433-461, 1998.
- [13] Sammartino, M., and Caffisch, R. E.; Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space. II. Construction of the Navier-Stokes solution. *Comm. Math. Phys.*, 192(2):463-491, 1998.