Nonexistence of scattering states for nonlinear Schrödinger equations with critical homogeneous nonlinearity

宮崎 隼人 (津山工業高等専門学校 総合理工学科)*

1 導入

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式を考察する:

(NLS) $$i\partial_t u + \Delta u = F(u), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

ここで, $u = u(t,x) : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ であり, 非線形項 F には次の斉次型条件

(1.1) $$F(\lambda z) = \lambda^{1+\frac{2}{d}} F(z) \quad (\lambda > 0, z \in \mathbb{C})$$

を仮定する. ここでは, 時刻無限大での解の漸近挙動に興味がある. 特に, 非線形項 F が定める特徴量によって解の漸近挙動を決定したい.

(1.1) を満たす典型例である Gauge 不変な非線形項 $F(u) = \mu |u|^{p-1} u$ $(\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ を持つ (NLS) は, $t \to \infty$ のとき, $p > 1 + 2/d$ ならば $u(t) \sim e^{it\Delta} u_+$, 臨界べき $p = 1 + 2/d$ ならば

$$u(t) \sim (2it)^{-\frac{d}{2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \widehat{u_+}\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(-i\mu \left|\widehat{u_+}\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^{\frac{2}{d}} \log t\right)$$

の漸近挙動を持つ (u_+ は終値状態). 必ずしも Gauge 不変でない斉次型臨界非線形項では, 解の漸近挙動は非線形項の形状により決定される. (1.1) を満たす非線形項 F を持つ (NLS) の解の漸近挙動を調べるには, まず F を 2π-周期関数 $g(\theta) = F(e^{i\theta})$ の Fourier 級数展開を利用して

$$F(u) = |u|^{\frac{2}{d}+1} g(\arg u) = g_0 |u|^{\frac{2}{d}+1} + g_1 |u|^{\frac{2}{d}} u + \sum_{n \neq 0,1} g_n |u|^{1+\frac{2}{d}-n} u^n$$

と展開する. ただし $g_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta$. ここで, 最右辺第 1 項を**非振動部**, 第 2 項を**共鳴部**, 第 3 項を**非共鳴部**と呼ぶ. [2,4] において, 空間 3 次元以下のとき, $g_0 = 0$ かつ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{1+\eta} |g_n| < \infty$ $(\eta > 0)$ の仮定の下, $g_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の場合は log 型の位相修正をもつ漸近形をもつ解が存在し, $g_1 = 0$ の場合は漸近自由となる解が存在することが示された.

本講演では, 先行研究 [2,4] で除いていた $g_0 \neq 0$ の場合を考察する. $g_0 \neq 0$ の場合は, 簡単な変数変換で $g_0 = 1$ の場合に帰着できることに注意する. $d = 2$ かつ $F(u) = |u|^2$ の場合, [5] によって (NLS) は時刻無限大で自由解に漸近するような解を持たないことが示されている. $d = 2$ かつ $F(u) = 2|\mathrm{Re}\, u|^2$ という具体例に関しては Hayashi-Naumkin(2006) により漸近挙動が調べられている. 一方で, Ikeda-Wakasugi(2013) や [1] により, $F(u) = |u|^{1+2/d}$ の場合には小さい初期値に対する爆発解の存在が示されている. これらを踏まえると, 一般の $g_0 = 1$ の場合に解の挙動を決定することは難しいと予想される. そこで, この場合の研究の第 1 歩として, 先行研究 [1,5] をより広い枠組みへ拡張することが本講演の目的である.

---

* 〒 708-8509 岡山県津山市沼 624-1
Email: miyazaki@tsuyama.kosen-ac.jp
Web page: http://www.tsuyama-ct.ac.jp/miyazaki/
本講演は大阪大学の眞崎聡氏との共同研究に基づく.

2　主結果

定義 1. $m \in \mathbb{R}$ に対し, $H^{0,m} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d);\ (1+|x|)^{m/2}u \in L^2\}$ と定義する.

定理 1 ([3])**.** $d \geqslant 1$ とし, F に対応する 2π-周期関数 g は $\{g_n\}_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ かつ $g_0 = 1$ を満たすと仮定する. このとき, (NLS) の解 $u(t) \in C([T,\infty), L^2)$ $(T \in \mathbb{R})$ がある $u_+ \in H^{0,\frac{d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - V_\lambda(t)\|_{L^2} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{2(d+2)}} \|u(\cdot) - V_\lambda(\cdot)\|_{L_{t,x}^{\frac{2(d+2)}{d}}([t,\infty)\times\mathbb{R}^d)} = 0$$

を満たすならば, $u_+ \equiv 0$. ここで, $V_\lambda(t) = (2it)^{-\frac{d}{2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \widehat{u_+}\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(-i\lambda \left|\widehat{u_+}\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^{\frac{2}{d}} \log t\right)$.

注意 1. 定理 1 は, 次元 d, 非線形項 F, 終値状態 u_+ のクラスに関して条件を弱め, さらに漸近形 V_λ が log 型位相修正を持つ場合も含む, という意味で [5] の拡張となっている. 特に, $\lambda = 0, g_1$ だけでなく, 全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ の可能性を否定していることに注意する.

注意 2.
- 定理 1 では時間大域解の存在は仮定されている. それゆえ, 解の存在が自明ではない. 次のような g が Lipschitz 連続とならない非線形項まで含まれている:

$$F(u) = |\operatorname{Re} u|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}+\frac{2}{d}}, \quad g(\theta) = |\cos\theta|^{1/2}, \quad g_n = O(|n|^{-3/2}).$$

- $g_0 = 0$, $g_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ の場合には, $\lambda = 0$ として同様の結果が成立. これは $g_1 \notin \mathbb{R}$ と非共鳴部の存在を許すという点で, Strauss(1974), Barab(1984) の拡張となっている.

定理 1 の証明は [5] と同様で, 背理法による. [5] では, 解に関する仮定を用いて $u(2t) - u(t)$ の L^2 ノルムを下から評価し, これが 0 に強収束しないことを示していた. 我々の改良点は, ノルムを測る代わりに積分方程式と非振動部との coupling をとり, 弱収束の意味での矛盾を導くことである. このとき, 停留位相と類似の議論から非振動部以外との coupling は全てその位相のずれにより $t \to \infty$ で消滅するため, 同様の矛盾が得られる.

続いて, 有限時間爆発の結果を紹介する. $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対し, 解の最大存在時刻を次のように定義する:

$$T_{\max}(u_0) = \sup\{T > 0\ ;\ \exists \text{ weak sol.: } u(t) \text{ to (NLS) with } u(0) = u_0 \text{ on } [0,T)\}.$$

定理 2 ([3])**.** $d \geqslant 1$ とし, g は $\{g_n\}_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ と $g_0 = 1$, $\mu := g_0 - \sum_{n\neq 0} |g_n| > 0$ を満たすとする. さらに適当な $k \leqslant d$ と $R_0 > 0$ に対し, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が次を満たすとする:

$$-\operatorname{Im} f(x) \geqslant \begin{cases} |x|^{-k} & |x| > R_0, \\ 0 & |x| \leqslant R_0. \end{cases}$$

このとき, ある $C = C(k, R_0, \mu) > 0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対し次の評価が成立する:

$$T_{\max}(\varepsilon f) \leqslant \begin{cases} C\varepsilon^{-\frac{2}{d-k}} & k < d, \\ \exp(C/\varepsilon) & k = d. \end{cases}$$

注意 3.
- 非線形項 F を一般化しているという意味で, [1] の拡張となっている.
- $T_{\max}$ の定義では解の一意性を仮定していない. また, L^2 での well-posedeness が得られる F に対しては, $f \in L^2$ も満たすとき, $\lim_{t\to T_{\max}} \|u(t)\|_{L^2} = \infty$ がわかる.

参考文献

[1] M. Ikeda and T. Inui, J. Evol. Equ. **15** (2015), no. 3, 571–581.

[2] S. Masaki and H. Miyazaki, to appear in SIAM J. Math. Anal., available at `arXiv:1612.04524`.

[3] ———, preprint (2017), available at `arXiv:1710.01754`.

[4] S. Masaki, H. Miyazaki, and K. Uriya, preprint (2017), available at `arXiv:1706.03491`.

[5] A. Shimomura and Y. Tsutsumi, Differential Integral Equations **19** (2006), no. 9, 1047–1060.