4次元 Zakharov 系と一様大域 Strichartz 評価¹

京都大学数理解析研究所 中西賢次

1. 概要

Zakharov 系はプラズマ中の Langmuir 波の時間発展を記述するモデルで、電場を表す $u(t, x) : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{C}$ とイオン密度を表す $n(t, x) : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}$ により

$$\begin{cases} i\dot{u} - \Delta u = nu, \\ \dot{n}/\alpha^2 - \Delta n = -\Delta|u|^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

で与えられる。但し、イオン音速 $\alpha > 0$ 以外の物理定数は正規化されている。

物理的には $d \leq 3$ と考えられるが、偏微分方程式を解析する立場からは4次元空間 $d = 4$ の場合に興味深いことが起こる（エネルギー空間の臨界現象）。この講演では、エネルギー空間の小さいとは限らない球対称解の大域挙動に関する結果と、そのために導出した、波動ポテンシャル付き線形 Schrödinger 方程式に対する一様大域 Strichartz 評価について解説する。

2. 4次元 ZAKHAROV 系のエネルギー臨界性

記号の簡単のため、波動成分 n の方程式を時間1階に書き換える。

$$D := \sqrt{-\Delta}, \quad N = n - iD^{-1}\dot{n}/\alpha, \quad n = \operatorname{Re} N \quad (2.1)$$

の対応で $n \leftrightarrow N$ と変換すると、方程式は (u, N) の連立系

$$\begin{cases} (i\partial_t - \Delta)u = nu, & n = \operatorname{Re} N \\ (i\partial_t/\alpha + D)N = D|u|^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

となる。以下、 $\|\cdot\|_p$ で $L^p(\mathbb{R}^d)$ ノルムを表す。(2.2) は $\|u\|_2$ とエネルギー (Hamiltonian)

$$E(u, N) := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \frac{|N|^2}{2} - n|u|^2 dx \quad (2.3)$$

を保存するので、解の大域挙動を調べるのに自然な関数空間はエネルギー空間

$$(u(t), N(t)) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \quad (2.4)$$

である ($\|\varphi\|_{H^1}^2 = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2$)。Zakharov 系が $d = 4$ でエネルギー臨界なのは、 $E(u, N)$ の非線形項に対する Hölder と Sobolev 不等式による評価から窺える：

$$\left| \int_{\mathbb{R}^4} n|u|^2 dx \right| \leq \|N\|_2 \| |u|^2 \|_2 = \|N\|_2 \|u\|_4^2 \leq C_*^2 \|N\|_2 \|\nabla u\|_2^2 \quad (2.5)$$

ここで C_S は臨界 Sobolev 不等式における最良定数である：

$$\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^4), \quad \|\varphi\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \leq C_S \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}. \quad (2.6)$$

また、 $\alpha \rightarrow \infty$ の重音速極限が非線形 Schrödinger 方程式 (NLS)

$$i\dot{u} - \Delta u = |u|^2 u \quad (N = |u|^2) \quad (2.7)$$

となり、これは次のスケール不変性によりエネルギー臨界である：

$$u(t, x) \mapsto \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) =: u_\lambda(t, x), \quad \|\nabla u_\lambda(0)\|_2 = \|\nabla u(0)\|_2. \quad (2.8)$$

(2.6) の最大化元は (2.7) の基底状態で与えられる (Aubin-Talenti 関数)。

$$W(x) = (|x|^2 + 1/8)^{-1} \implies \|W\|_4 = C_S \|\nabla W\|_2, \quad -\Delta W = W^3. \quad (2.9)$$

但し、4次元 Zakharov 系のエネルギー臨界性は $u(t) \in H^1(\mathbb{R}^4)$ よりも $N(t) \in L^2(\mathbb{R}^4)$ に強く顕れる。実際、Zakharov 系は NLS より非線形平滑化が強く、 u の滑らかさは $H^{1/2}(\mathbb{R}^4)$ まで下げられる [2, 7] が、 $N \in L^2(\mathbb{R}^4)$ の臨界性は端点 Strichartz 評価：

$$\| \|u(t)\|_4 \|L_t^2 \leq C(\|u(0)\|_2 + \| \|(i\partial_t - \Delta)u(t)\|_{4/3} \|L_t^2. \quad (2.10)$$

¹Zihua Guo との共同研究

と関連している。右辺に方程式を代入すると、Hölder

$$\| \| \| nu(t) \|_{4/3} \|_{L_t^2} \leq \| \| \| N(t) \|_2 \|_{L_t^\infty} \cdot \| \| \| u(t) \|_4 \|_{L_t^2} \quad (2.11)$$

から閉じた評価が得られるが、 $\|N(t)\|_2$ が小さくないと nu を小摂動として扱えない。Hölder と Strichartz の指数が丁度合うのは、NLS の L^2 臨界冪 $p = 1 + 4/d$ が丁度 $p = 2$ となる事に対応する。しかし波動方程式の分散性は Schrödinger より弱いため、上記のような議論で L_t^∞ 以外の Strichartz 型時空ノルムを適用できない。これが NLS (2.7) との違いになる。

3. 主結果

以下、 $d = 4$ とする。 $(u, N) = (W, W^2)$ は 4次元 Zakharov 系の定在波の中で最小エネルギーを持つ (基底状態)。我々の主結果は基底状態下の解を 2つに分類する。

定理 1. (2.2) は $(u(t), N(t)) \in H^1(\mathbb{R}^4) \times L^2(\mathbb{R}^4)$ において初期値問題が時間局所適切で、 $E(u, N)$ と $\|u(t)\|_2$ は保存される。初期値が球対称かつ $E(u(0), N(0)) < E(W, W^2)$ を満たす場合、もし $\|N(0)\|_2 < \|W^2\|_2$ なら解は時間大域的かつ散乱する：

$$\exists (u_\pm, N_\pm) \in H^1 \times L^2, \quad \|u(t) - e^{-it\Delta} u_\pm\|_{H^1} + \|N(t) - e^{it\alpha D} N(0)\|_2 \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (3.1)$$

そうでなければ、解は有限時間で爆発するか、 $t \rightarrow \infty$ でエネルギー空間で非有界になる。

これは (2.7) に対する Kenig-Merle [3] の結果と同様だが、証明上の困難は前述のように nu の相互作用 (N の波動成分) にあり、そのために次の Strichartz 評価を用いる。

定理 2. $\forall s \in [0, 1), \forall B \in [0, \|W^2\|_2), \exists C > 0$ s.t. $(i\partial_t u - \Delta + \text{Re } n)u = f, (i\partial_t + D)N = 0, \|N(0)\|_2 \leq B$ かつ u, N が共に球対称なら、 $\langle D \rangle := \sqrt{1 - \Delta}$ として

$$\| \| \| \langle D \rangle^s u(t) \|_4 \|_{L_t^2} \leq C \left[\| \| \| \langle D \rangle^s u(0) \|_2 + \| \| \| \langle D \rangle^s f(t) \|_{4/3} \|_{L_t^2} \right]. \quad (3.2)$$

ここで使用上重要なのは C の一様性であり、それによって (W の変分的性質も用いて) 定理 1 の大域解存在が示される。定理 2 の証明は N に profile 分解 [1] を用いた背理法で、相互作用に対しては normal form (cf. [2]) と Strichartz 評価における球対称平滑化 [5] を利用し、最終的に $s = 0$ で定常ポテンシャルの場合 [8] に帰着する。 $B < \|W^2\|_2$ の制限は基底状態解があるため本質的である。 $s < 1$ の制限は臨界 Sobolev 埋蔵の破綻 $W^{1,4}(\mathbb{R}^4) \not\subset L^\infty(\mathbb{R}^4)$ に由来する (H^1 から $L_t^2 L_x^\infty$ への Strichartz 評価も破綻する [5])。

他方、定理 1 の証明では、 N の摂動が困難なため [3] のように profile 分解による背理法は使用せず、NLS での [4] の論法に従って virial-Morawetz 型評価 [9] (Zakharov 系では [6]) を直接適用する。

REFERENCES

- [1] H. Bahouri and P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*. Amer. J. Math. **121** (1999), no. 1, 131–175.
- [2] I. Bejenaru, Z. Guo, S. Herr and K. Nakanishi, *Well-posedness and scattering for the Zakharov system in four dimensions*. Anal. PDE **8** (2015), no. 8, 2029–2055.
- [3] C. Kenig and F. Merle *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*. Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.
- [4] B. Dodson and J. Murphy, *A new proof of scattering below the ground state for the 3D radial focusing cubic NLS*. Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 11, 4859–4867.
- [5] Z. Guo, J. Li, K. Nakanishi and L. Yan, *On the boundary Strichartz estimates for wave and Schrödinger equations*. J. Differential Equations **265** (2018), no. 11, 5656–5675.
- [6] Z. Guo, K. Nakanishi and S. Wang, *Global dynamics below the ground state energy for the Zakharov system in the 3D radial case*. Adv. Math. **238** (2013), 412–441.
- [7] I. Kato, K. Tsugawa, *Scattering and well-posedness for the Zakharov system at a critical space in four and more spatial dimensions*. Diff. Int. Equ. **30** (2017), no. 9-10, 763–794.
- [8] H. Mizutani, *Uniform Sobolev estimates for Schrödinger operators with scaling-critical potentials and applications*, arXiv:1609.03253v5.
- [9] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation*. J. Differential Equations **92** (1991), no. 2, 317–330.