ランダムシュレーディンガー作用素の固有関数の漸近形について

学習院大学理学部　中野史彦

動機：1次元ランダムシュレーディンガー作用素 $-\triangle + \lambda V$ （V：ランダムポテンシャル）は確率1で固有値のみを持ち、その固有関数 φ は特定の点の周りに局在しその外部では指数減衰、つまり $\varphi(x) \sim \exp(-|x-x_0|/l_{loc})$ （l_{loc}：局在長）となることが知られている。

ポテンシャルが弱い場合、$l_{loc} \overset{\lambda \to 0}{=} O(\lambda^{-2})$ であることから、系のサイズ L との比較により次が予想される。

(1) $\lambda \ll L^{-1/2}$：非局在、(2) $\lambda \gg L^{-1/2}$：局在、(3) $\lambda \sim L^{-1/2}$：critical

問題設定と得られた結果：そこで、次で定義される $L^2[0,L]$ 上のシュレーディンガー作用素を考える。

$$H_L := -\frac{d^2}{dt^2} + L^{-\alpha} F(X_t), \quad \text{Dirichlet b.c.}$$

ここで、$\alpha > 0$, $F \in C^\infty(M)$, M：torus, $(X_t)_{t \geq 0}$ は M 上のブラウン運動である。固有値の局所的漸近分布は [N14, KN17] で研究されており、動機の描像 (1)-(3) を裏付けている。ここでは、固有関数（の作る測度）の漸近形を考えたい。そのため、まず次のようにおく。

$$\begin{aligned}
&\{E_j(L)\}_j \text{：} H_L \text{ の固有値、} \quad \{\psi_j^{(L)}\}_j \text{：対応する固有関数} \\
&J := [a,b] (\subset (0,\infty)) \text{：固有値を考える区間、} \\
&E_J(L) : \{E_j(L)\} \cap J \text{ 上の一様分布確率変数、} \\
&\mu_{E_j(L)}^{(L)}(dt) := (const.) L \left(|\psi_j^{(L)}(Lt)|^2 + \frac{|\psi_j^{(L)\prime}(Lt)|^2}{E_j(L)} \right) dt.
\end{aligned}$$

$(E_J(L), \mu_{E_J(L)}^{(L)})$ の同時分布の極限を求めたい。収束先を記述するため、更に次の記号を定義する。

$$\begin{aligned}
&N(E) := \pi^{-1} E^{1/2} \quad \text{：積算状態密度} \\
&\widetilde{E}_J \text{：分布 } N(J)^{-1} 1_J(E) dN(E) \text{ に従う確率変数} \\
&S(t) := 2Z(t) - 2|t|, \quad Z_t \text{：two sided BM} \\
&u \text{：} [0,1] \text{ 上の一様分布} \\
&\tau(E) := \frac{1}{8E} \int_M |\nabla (L + 2i\sqrt{E})^{-1} F|^2 dx, \quad L \text{：} X_t \text{ の生成作用素}
\end{aligned}$$

ここで $\tilde{E}_J$, $S(t)$, u は独立とする。

Theorem 0.1

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \alpha > 1/2 : (E_J(L), \mu_{E_J(L)}^{(L)}) \xrightarrow{d} (\widetilde{E}_J, 1[0,1](t) dt) \\
&(2) \quad \alpha = 1/2 : (E_J(L), \mu_{E_J(L)}^{(L)}) \xrightarrow{d} \left(\widetilde{E}_J, \frac{\exp\left[S(\tau(\tilde{E}_J)(t-u))\right] dt}{\int_0^1 \exp\left[S(\tau(\tilde{E}_J)(s-u))\right] ds} \right)
\end{aligned}$$

Remark 0.2
(1) 離散モデルで $\alpha = 1/2$ のとき：*[RV18]* で扱われており、上述の H_L で同様の結果が成り立つことが予想されている。
(2) $\alpha < 1/2$ のとき：*[N07]* の議論によれば、次が予想される。

$$(3) \quad \alpha < 1/2 : (E_J(L), \mu^{(L)}_{E_J(L)}) \xrightarrow{d} (\widetilde{E}_J, \delta_{unif[0,1]} dt)$$

参考文献

[N07] F. Nakano, Distribution of localization centers in some discrete random systems, Rev. Math. Phys. **19**(2007), 941-965.

[N14] F. Nakano, Level statistics for one-dimensional Schrödinger operators and Gaussian beta ensemble, J. Stat. Phys. **156**(2014), 66-93.

[KN17] S. Kotani and F. Nakano, Poisson statistics for 1d Schrödinger operators with random decaying potentials, Elec. J. Prob. **22**(2017), no.69, 1-31.

[RV18] B. Rifkind, B.Virág, Eigenvectors of the 1-dimensional critical random Schrödinger operator, to appear in GAFA(2018)