変数係数をもつ Airy 型方程式の解の波面集合について [1]

南部 耕一郎 (東京理科大学大学院理学研究科)

本研究では, 次の Airy 型方程式の初期値問題を考える.

$$(1)\qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x) + \partial_x\big(a(t,x)u(t,x)\big) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ で, $a(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ は実数値関数であり, $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ とする. さらに $a(t,x)$ に対して以下の仮定をする.

仮定. $\rho > 1$ とする. 任意の $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, ある $C_l > 0$ が存在して, 次が成立する:

$$|\partial_x^l a(t,x)| \le C_l(1+|x|)^{-\rho-l}, \qquad (\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}).$$

この仮定の下, 波束変換を用いて u_0 に対する (1) の解 u の波面集合を決定することが本研究の目的である.

定義 1 (波束変換)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ とする. このとき $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対し, 窓関数 φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を以下で定義する:

$$W_\varphi f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

定義 2 (波面集合)**.** $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対し, 波面集合 $WF(f) \subset \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ を以下で定義する.
$(x_0,\xi_0) \notin WF(f) :\Leftrightarrow \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\chi(x_0) \neq 0$ をみたす χ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $C_N > 0$ が存在して, 次をみたす: $|\widehat{\chi f}(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}, \qquad (\forall \xi \in \Gamma)$.
ここで, ξ_0 の錐近傍 Γ とは, ξ_0 の近傍 Γ で, $\xi \in \Gamma, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha\xi \in \Gamma$ をみたすものをいう.
また, $\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$ である.

[1] では波束変換を用いた波面集合の特徴づけが考察されている. [2] では, (1) の $a=0$ および, $a=x$ の場合について研究されている. [3] を参考に以下の定理を得た.

定理. 仮定の下, (1) の解 $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$ が存在するとする. このとき以下の (i), (ii) は同値:
(i) $(x_0,\xi_0) \notin WF(u(t_0,\cdot))$.
(ii) x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, 任意の $b \ge 1$, 任意の $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ に対して, ある $C_{N,b,\varphi_0} > 0$ があって, 次をみたす:

$$|W_{\varphi_\lambda(-t_0)} u_0(x(0;\lambda),\lambda\xi)| \le C_{N,b,\varphi_0}\lambda^{-N}, \qquad (\forall x \in K, b^{-1} \le |\xi| \le b \text{ をみたす } \forall \xi \in \Gamma, \forall \lambda \ge 1).$$

ここで, $x(t;\lambda)$ は, $\dot{x}(t) = -3\lambda^2\xi^2 + a(t,x(t))$, $x(t_0) = x$ の解であり,
$\varphi_\lambda(t,x,\xi) = e^{-t(\partial_x^3 + 3i\xi\partial_x^2)}\varphi_{0,\lambda}(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{it(\eta^3+3\xi\eta^2)}\widehat{\varphi_{0,\lambda}}(\eta)e^{ix\eta}d\eta$, $\varphi_{0,\lambda}(x) = \lambda^{1/4}\varphi_0(\lambda^{1/2}x)$ である.

参考文献

[1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, “Remark on characterization of wave front set by wave packet transform”, Osaka Journal of Math., **54**, No.2, (2017), 209-228.

[2] 神長 雄世,『Airy 型方程式の解の波面集合について』, 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻 修士論文, (2017).

[3] K. Kato and S. Ito, “Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential”, SUT Journal of Math., **50**, No.2, (2014), 383-398.

[1] 本講演は加藤 圭一氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく