

Scattering for a mass critical NLS system below the ground state with and without mass resonance condition

西村 蔵ノ輔 (東京理科大学大学院理学研究科)

本講演は、戌亥隆恭氏 (大阪大学)、岸本展氏 (京都大学 RIMS) との共同研究に基づく。本講演では次の質量臨界非線形シュレディンガー方程式系について考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \bar{u}v, \\ i\partial_t v + \kappa\Delta v = u^2, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4, \quad (\text{NLS})$$
$$(u, v)|_{t=0} = (u_0, v_0) \in L^2(\mathbb{R}^4) \times L^2(\mathbb{R}^4).$$

ここで、 $\kappa > 0$ は定数である。 $\lambda > 0$ として、 $(u, v)^\lambda := \lambda^{-2}(u, v)(\lambda^{-2}t, \lambda^{-1}x)$ とおくと、 (u, v) が (NLS) の解であるとき、 $(u, v)^\lambda$ もまた (NLS) の解となる。このスケール変換により、 L^2 ノルムが不変になるのが 4 次元の場合であり、質量臨界と呼ばれる。同様にして 5 次元を $\dot{H}^{1/2}$ 臨界 という。この方程式の $L^2 \times L^2$ における局所適切性に関しては [3] により得られており、特に次で定義される質量は保存される。

$$M(u, v)(t) := \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{L^2}^2$$

本研究の目的は (NLS) の解が散乱するための十分条件を基底状態 (ϕ, ψ) の質量 $M(\phi, \psi)$ を用いて記述することである。ここで、(NLS) の解 (u, v) が散乱するとは、時間大域的に存在し、かつ次を満たすことを言う。

$$U_\kappa(-t)(u, v)(t) \rightarrow (u^\pm, v^\pm) \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty \text{ in } L^2 \times L^2 \text{ for some } (u^\pm, v^\pm) \in L^2 \times L^2.$$

ここで、 $U_\kappa(t) := (e^{it\Delta}, e^{i\kappa t\Delta})$ であり、 $e^{it\Delta}$ は自由シュレディンガー方程式の解作用素である。つまり散乱とは、時刻無限大の極限で、非線形項の影響が消えて自由解に漸近することである。また基底状態とは、次の楕円型方程式系の実数値最小作用解のことである。

$$\begin{cases} -\phi + \Delta\phi = \phi\psi, \\ -2\psi + \kappa\Delta\psi = \phi^2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^4.$$

5 次元 ($\dot{H}^{1/2}$ 臨界) の場合については質量共鳴条件 $\kappa = 1/2$ の下で、[2] により散乱の十分条件が得られている。また、質量臨界乗型シュレディンガー方程式に対する基底状態の下での散乱が [1] において証明されている。本研究では、以下の通り、 L^2 の設定の下で質量が基底状態のそれよりも小さいような初期値に対して、(NLS) の解が散乱するための十分条件を与えた。

定理. 次のいずれか一方を仮定する。

(条件 1) $\kappa = \frac{1}{2}$.

(条件 2) $\kappa \neq \frac{1}{2}$ かつ 初期値 (u_0, v_0) は球対称である。

このとき、初期値 $(u_0, v_0) \in L^2 \times L^2$ が $M(u_0, v_0) < M(\phi, \psi)$ を満たすならば、対応する (NLS) の解 (u, v) は散乱する。

参考文献

- [1] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state*, Adv. Math. **285** (2015), 1589–1618.
- [2] M. Hamano, *Global dynamics below the ground state for the quadratic schrödinger system in 5d*, preprint, arXiv:1805.12245, 2018.
- [3] N. Hayashi, T. Ozawa, and K. Tanaka, *On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30** (2013), no. 4, 661–690.