Boundedness in a chemotaxis-growth model with nonlinear diffusion for tumor invasion*

大沢 竜介　(東京理科大学大学院理学研究科)

癌浸潤現象を表す次のような走化性方程式 (P) について考える:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u,w)\nabla u) - \nabla\cdot(u\nabla v) + au - bu^2, & x\in\Omega,\ t>0,\\ v_t = \Delta v + zw, & x\in\Omega,\ t>0,\\ w_t = -zw, & x\in\Omega,\ t>0,\\ z_t = \Delta z - z + u, & x\in\Omega,\ t>0. \end{cases}
$$

ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\le 9)$ は滑らかな境界をもつ有界領域, $D\in C^{1+\theta}(\mathbb{R}^2) := \{f\in C^1(\mathbb{R}^2)\,|\, f$ の偏導関数は θ 次 Hölder 連続関数 $\}$ $(\exists\,\theta>0)$ は既知関数, a, b は正の定数, u, v, w, z は x, t を変数とする実数値の未知関数であり, u, v, z は Neumann 型境界条件を満たし, それぞれの $t=0$ における値を u_0, v_0, w_0, z_0 とし, 非負の既知関数とする. さらに $u_0\in C(\overline{\Omega})$, $v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)$, $w_0\in C^{1+\theta}(\overline{\Omega})$, $z_0\in C(\overline{\Omega})\cap W^{1,q}(\Omega)$ と仮定する. ただし, $N\le 5$ のとき $q=2$, $6\le N\le 9$ のとき $q>2+\frac{20}{N+1}$ とする.

問題 (P) で $N\le 3$, $D\equiv 1$ の場合, Fujie [1] によって時間大域的古典解の存在と有界性及び解の漸近挙動が示されている. **本研究では $\boldsymbol{N\le 9}$ まで拡張することができ, さらに $\boldsymbol{D}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}$ に依存する場合についても (P) の時間大域的古典解の存在と有界性に関する結果を得た.**

定理

$N\le 9$, $\theta>0$ とし, $N\le 5$ のとき $q=2$, $6\le N\le 9$ のとき $q>2+\frac{20}{N+1}$ とする. $(u_0,v_0,w_0,z_0)\in C(\overline{\Omega})\times W^{1,\infty}(\Omega)\times C^{1+\theta}(\overline{\Omega})\times\big(C(\overline{\Omega})\cap W^{1,q}(\Omega)\big)$ は非負値関数の組と仮定し, $D\in C^{1+\theta}(\mathbb{R}^2)$ は

$$\exists\, c>0\ \forall\,\zeta_1,\zeta_2\ge 0\,;\ D(\zeta_1,\zeta_2)\ge c>0$$

を満たすとする. このとき, (P) の古典解が一意的に存在し, 次を満たす:

1. $0\le u, z\in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty))$,
   $0\le v\in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty))\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);W^{1,\infty}(\Omega))$,
   $0\le w\in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{1,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty))$.
2. $\exists\, C>0\ \forall\, t>0\,;\ \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|z(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C.$

ここで,

$$C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty)) := \Big\{ f\in C(\overline{\Omega}\times(0,\infty)) \,\Big|\, f_{x_i}, f_{x_ix_j}, f_t\in C(\overline{\Omega}\times(0,\infty))\ (1\le i,j\le N)\Big\},$$

$$L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);W^{1,\infty}(\Omega)) := \Big\{ f \,\Big|\, f \text{ は } [0,\infty) \text{ 上の } W^{1,\infty}(\Omega) \text{ 値可測関数},\ \operatorname*{ess\text{-}sup}_{t\in(T_1,T_2)}\|f(t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}<\infty\ \forall\, T_1,T_2\in[0,\infty)\Big\}$$

と定義する.

<u>証明の鍵</u>: [1] では $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}$ の評価を用いて時間大域解の存在と有界性を示している. しかし $N\ge 4$ のときには $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}$ の評価を用いて示すことが難しい. 本研究では, $N\le 5$ のときには $\|z(\cdot,t)\|_{H^1(\Omega)}$ の評価, $6\le N\le 9$ のときには $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}$ $(p>6)$ の評価を得ることで難点を回避した.

参考文献

[1] K. Fujie, *Global asymptotic stability in a chemotaxis-growth model for tumor invasion*, RIMS Kôkyûroku No.1994, 121–127.

*本研究は横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.