

Global existence and boundedness in a higher-dimensional chemotaxis-haptotaxis system with signal-dependent sensitivity*

大塚 裕彦 (東京理科大学大学院理学研究科)

次の chemotaxis-haptotaxis 系を初期条件及び Neumann 型境界条件の下で考える:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (\chi(v)u\nabla v) - \xi \nabla \cdot (u\nabla w) + \mu u(1 - u - w), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = -vw, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) は滑らかな境界をもつ有界領域, ξ, μ は正の定数, u, v, w は x, t を変数とする実数値の未知関数とする. また $\chi = \chi(v)$ は感応性関数と呼ばれ, ここでは簡単のため

$$(1) \quad \chi(v) = \frac{\chi_0}{(1+v)^2} \quad (\chi_0 \geq 0)$$

とする. 問題 (P) はある化学物質に引き寄せられる走化性 (chemotaxis) と生物が接触することで起こる走触性 (haptotaxis) をもった生物の動きを記述した数理モデルである. Cao [1] では

$$\chi(v) = \chi_0 \quad (\chi_0 \geq 0)$$

の場合に μ が十分大きいという条件の下で (P) の時間大域的古典解の存在と有界性が得られている.

本研究では, Cao [1] では考察されていない感応性関数をもつ場合に, すべての $\mu > 0$ に対して同じ結論を得た.

結果

$\xi > 0, \mu > 0$ のとき, ある $\delta > 0$ が存在して, $\chi_0 < \delta$ ならば適切な初期値に対して (P) の古典解

$$u, v, w \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$$

が一意的に存在し, 次を満たす:

$$\exists q > n \exists C > 0 \forall t > 0; \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

ただし,

$$C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)) := \{f \in C(\bar{\Omega} \times (0, \infty)) \mid f_{x_i}, f_{x_i x_j}, f_t \in C(\bar{\Omega} \times (0, \infty)) \ (1 \leq i, j \leq N)\}.$$

【注意】 $\chi(v)$ に対する条件を, (1) を例として含む形に一般化することもできている.

証明の鍵: 感応性関数 $\chi(v)$ の影響で Cao [1] と同じ方法では解決できなかったが, Mizukami–Yokota [2] で用いられていたテスト関数を導入することで解決した.

参考文献

- [1] X. Cao, *Boundedness in a three-dimensional chemotaxis-haptotaxis model*, Z. Angew. Math. Phys., 67 (2016), 13 pp.
- [2] M. Mizukami, T. Yokota, *Global existence and asymptotic stability of solutions to a two-species chemotaxis system with any chemical diffusion*, J. Differential Equations, 261 (2016), 2650–2669.

*本講演は水上雅昭氏 (東京理科大学) と横田智巳氏 (東京理科大学) との共同に基づく.