球対称非減少なポテンシャル関数をもつ 臨界Hardy不等式に関連した最小化問題

佐野めぐみ　(東京工業大学 理学院数学系)*

本講演では臨界Hardy不等式の最良定数に関連した次の最小化問題G_a:

$$G_a := \inf_{0\neq u\in W_0^{1,N}(B_1)} R_a(u), \quad G_{a,\mathrm{rad}} := \inf_{0\neq u\in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,N}(B_1)} R_a(u), \quad R_a(u) := \frac{\int_{B_1} |\nabla u|^N\,dx}{\left(\int_{B_1} \frac{|u|^q}{|x|^N(\log\frac{a}{|x|})^\beta}dx\right)^{\frac{N}{q}}}$$

の達成可能性について考察する．ここでB_1は$\mathbb{R}^N$の単位球, $N \geq 2$, $a,q,\beta > 1$とし, $W_0^{1,N}(B_1) := \overline{C_c^\infty(B_1)}^{\|\nabla\cdot\|_{L^N}}$, $W_{0,\mathrm{rad}}^{1,N}(B_1) := \{u \in W_0^{1,N}(B_1)\,|\,u$は球対称$\}$とする．ここで最小化問題$G_a$の最小化元$u$は, singular potentialを持つ次の非線形楕円型偏微分方程式の弱解となっていることに注意する($b\in\mathbb{R}$はラグランジュ未定乗数).

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = b\,\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^N(\log\frac{a}{|x|})^\beta} \quad \text{in } B_1, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial B_1.$$

$q = \beta = N$のとき, G_aは臨界Hardy不等式の最良定数に付随する最小化問題となっており, 一般領域を含めG_aの達成不可能性が既に証明されている(ref. [1], [5], [2]). 本講演では全ての$q,\beta > 1$に関して考察し, 特に[4]及び2016年1月号の堀内氏の論説[3]で言及されたG_aに関する未解決な問題(Q):

$$(Q) \quad \beta = \frac{N-1}{N}q + 1,\ q > N,\ a > 1\text{ のとき,}G_a\text{は達成されるか？}$$

について最近得られた結果を述べる.この問題を解析する上での難点は主に二つあり,「対応する埋め込み:$W_0^{1,N}(B_1) \hookrightarrow L^q(B_1; V_{a,\beta}(x)dx)$が非コンパクトである(ただし$V_{a,\beta}(x) := |x|^{-N}(\log\frac{a}{|x|})^{-\beta}$とする)」という点と, $a < e^{\frac{\beta}{N}}$のときはポテンシャル関数V_aが球対称減少とはならないため「球対称再配列の議論が適用できず, 問題を一次元化できない」という点である.(※$q \leq N$のときは, 球対称再配列の議論が適用できない場合でも, 他の方法を考えることで問題を一次元化することが可能である) 最後に時間が許せば一般領域の場合や, [4]及び[3]で扱われている重み付き臨界ソボレフ空間の場合に関してもある程度は同じように解析でき, 同様の結果が得られることについても言及する.

参考文献

[1] Adimurthi, Sandeep, K., *Existence and non-existence of the first eigenvalue of the perturbed Hardy-Sobolev operator*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132** (2002), no. 5, 1021-1043.

[2] Byeon, J., Takahashi, F., *Hardy's inequality in a limiting case on general bounded domains*, ArXiv:1707.04018v2, (2017).

[3] Horiuchi, T., *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities and related topics (Japanese)*, Sūgaku **68** (2016), no. 1, 1-23.

[4] Horiuchi, T., Kumlin, P., *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg-type inequalities involving critical and supercritical weights*, Kyoto J. Math. **52** (2012), no. 4, 661-742.

[5] Ioku, N., Ishiwata, M., *A scale invariant form of a critical Hardy inequality*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 18, 8830-8846.

* e-mail: `sano.m.af@m.titech.ac.jp`