準相対論的 Pauli-Fierz モデルの基底状態について—粒子が質量を持たない場合—

佐々木格（信州大学）

Pauli-Fierz モデルは荷電粒子と光（量子電磁場）の相互作用を記述する量子モデルの一つである。この Pauli-Fierz モデルでは荷電粒子の運動エネルギーは非相対論的であるのに対し，本講演で考察する準相対論的 Pauli-Fierz モデル (semi-relativistic Pauli-Fierz model, SRPF) では，粒子の運動エネルギーは $\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}-M$ と定義される。相対論的な量子電磁力学の数学的モデルとしては，SRPF の他には Dirac-Maxwell モデル，Brown-Ravenhall モデル，Furry 描像といったものがある。

以下では（荷電）粒子が一個だけの場合の SRPF を考える。粒子の状態のヒルベルト空間は $\mathcal{H}_{\mathrm{p}} = L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{x})$ で記述される。場の状態のヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上のボソンフォック空間 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2))$ である。SRPF の状態の空間は $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathrm{p}} \otimes \mathcal{F}$ であり，全系のハミルトニアンは

$$H^V := \sqrt{(\mathbf{p}-e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2+M^2}-M+H_f+V(\mathbf{x})$$

と定義される。ただし $M \geq 0$ は粒子の質量，$\mathbf{p} = -i\nabla_{\mathbf{x}}$ は粒子の運動量，H_f は自由な光のエネルギー

$$H_f = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k},\lambda) a(\mathbf{k},\lambda) d^3\mathbf{k}, \qquad (\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は量子化されたベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\rho}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \Big(e^{2\pi i \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a(\mathbf{k},\lambda) + e^{-2\pi i \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a^*(\mathbf{k},\lambda) \Big) d\mathbf{k}$$

である。生成・消滅作用素 $a^*(\mathbf{k},\lambda)$, $a(\mathbf{k},\lambda)$ は $\mathcal{F}$ に作用する作用素値超関数であり，正準交換関係

$$[a(\mathbf{k},\lambda), a^*(\mathbf{k}',\mu)] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda,\mu}$$
$$[a(\mathbf{k},\lambda), a(\mathbf{k}',\mu)] = [a(\mathbf{k},\lambda), a(\mathbf{k}',\mu)] = 0$$

を満たす。$\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$ は $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = 0$ と $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\mathbf{e}_\mu(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda,\mu}$ を満たす，$\mathbb{R}^3$ における単位ベクトルである。$\widehat{\rho}$ の逆フーリエ変換 $\rho(\mathbf{x})$ は光が感じる粒子の位置の分布であり，本来粒子は点であることから $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ とするべきところであるが，そうすると $\widehat{\rho}(\mathbf{k})$ は定数となり $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が $\mathcal{F}$ 上の自己共役作用素とならない。これを解決するために $\omega^{-1/2}\widehat{\rho} \in L^2(\mathbb{R}^3; d\mathbf{k})$ を仮定する。この正則化 $\widehat{\rho}$ は紫外切断と呼ばれる。

Definition 1. 実関数 $V(\mathbf{x})$ で $(-\Delta)^{1/2}$ に対して相対有界かつ $(-\Delta)^{1/2}$ 限界が *1* 未満となるものの集合を V_{rel} と書く。また $V(\mathbf{x}) \geq 0$ で二回連続微分可能，$\partial_\mu V$, $\partial_\mu^2 V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$，$(\mu = 1, 2, 3)$ かつ $D(V) \subset D(\langle \mathbf{x} \rangle)$ となるものの集合を V_{conf} と書く。ただし $\langle \mathbf{x} \rangle = (1 + |\mathbf{x}|^2)^{1/2}$.

Theorem 2 (Hidaka, Hiroshima(2013))**.** $\hat{\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ かつ $\hat{\rho}(\mathbf{k})$ は実関数とする。$V \in V_{\mathrm{rel}} \cup V_{\mathrm{conf}}$ とする。このとき H^V は $D(|\mathbf{p}|) \cap D(V) \cap D(H_f)$ 上で自己共役である。

また，ある取り扱いやすい定義域上で H^V は本質的に自己共役となる。$E^V := \inf \sigma(H^V)$, $E^0 := \inf \sigma(H^0) + \liminf_{|\mathbf{x}| \to \infty} V(\mathbf{x})$ とする。束縛条件

$$E^V < E^0$$

が成り立つときに H^V は基底状態を持つことが期待される。実際に，$M > 0$ かつ V が Coulomb 引力ポテンシャルである場合の基底状態の存在は Könenberg, Matte, Stockmayer(2011) よって証明されている。彼らの証明は Coulomb 型以外の場合にも直ちに適用可能である。

次に問題となるのが質量 M が 0 の場合である。

H_f の定義で $\omega(\mathbf{k})$ を $\omega_m(\mathbf{k}) := \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ に置き換えたものを $H_{f,m}$ と書き，H^V の定義で H_f を $H_{f,m}$ に置き換えたハミルトニアンを H_m^V と書く。

次の仮定を設ける:

Assumption 3. *(1)* すべての $m > 0$, $M \geq 0$ に対して H_m^V は基底状態 Φ_m を持つ。
(2) ある $m_0 > 0$ があって，

$$\sup_{0 < m < m_0} \| \langle x \rangle^2 \Phi_m \|^2 < \infty$$

が成り立つ。

Coulomb 引力や調和振動子のような束縛ポテンシャルの場合にはこの仮定が成り立つことが証明されている (Hiroshima(2014))。本講演で紹介する主結果は次の定理である。

Theorem 4 ((2016) Hidaka, Hiroshima, S.)**.** $\hat{\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ かつ $\hat{\rho}$ は実関数とする。*Assumption 3* を仮定する。このとき $M = 0$ のときの準相対論的 *Pauli-Fierz* ハミルトニアン H^V は基底状態を持つ。

参考文献

T. Hidaka, F. Hiroshima, I. Sasaki, *Spectrum of the semi-relativistic Pauli-Fierz model II*, `arxiv:1609.07651`