Reaction-diffusion-ODE system の解のダイナミクス

鈴木 香奈子

茨城大学理学部
kanako.suzuki.sci2@vc.ibaraki.ac.jp

この講演では，$u = u(x,t)$ と $v = v(x,t)$ に関する以下の連立系について考察する：

$$u_t = f(u,v), \qquad \text{for} \quad x \in \overline{\Omega},\ t > 0, \tag{1}$$

$$v_t = D\Delta v + g(u,v), \qquad \text{for} \quad x \in \Omega,\ t > 0. \tag{2}$$

拡散項をもつ v に対しては Neumann 境界条件を課す：

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{for} \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で，ν は $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線とする．(2) の右辺にある D は正の定数である．以下では，(1)–(3) を *reaction-diffusion-ODE system* と呼ぶことにする．

生体内のいくつかの現象では，細胞膜上の受容体にシグナル分子が結合するプロセスが重要な役割を果たすことが明らかになっている．例えば、細胞の周りを拡散する化学物質と、それにより促進される細胞増殖のような局所的プロセス（拡散しない）との相互作用を記述する場合に，reaction-diffusion-ODE system が現れる．パターン形成においても，このようなプロセスが重要視されつつあり，reaction-diffusion-ODE system によるいくつかの数理モデルや，数本の常微分方程式と数本の反応拡散方程式から成る 3 連立以上の数理モデルが提唱されている．Reaction-diffusion-ODE 系によるパターン形成の数理モデルは、実際の現象から観察される様子をモデルに表すため、u や v が実際に何に相当するか説明できる場合が多い．これは，古典的な反応拡散系によるパターン形成の数理モデルとの大きな違いである．しかし，空間非一様なパターンを誘発するメカニズムは，古典的なモデルと同様に拡散誘導不安定化に基づくものが多い．拡散誘導不安定化に基づく数理モデルでは，初期値-境界値問題の解が安定な非定数定常解（パターン）に収束することが期待される．しかし，我々のこれまでの研究で，拡散誘導不安定化に基づく reaction-diffusion-ODE system のダイナミクスは，古典的な反応拡散系によるパターン形成の数理モデルのそれとは大きく異なることを示した．拡散誘導不安定化に基づく reaction-diffusion-ODE system とは，以下を満たす系である：

Theorem 1. 定数ベクトル $(\bar{u}, \bar{v})$ は (1)–(3) の定数定常解とする．もし，

$$f_u(\bar{u}, \bar{v}) > 0$$

ならば，$(\bar{u}, \bar{v})$ は (1)–(3) の不安定な定常解である．

拡散誘導不安定化に基づく reaction-diffusion-ODE system に対して，数値実験により様々な空間パターンが生じることが示されている [1]．しかし，この系の非定数定常解はすべて不安定であることが分かる [4, 5]．従って，数値実験で見られる空間パターンは定常解ではない．さらに，たとえ対応する常微分方程式系の解が一様に有界であっても，拡散誘導不安定化のメカニズムが解の爆発を引き起こすことも分かった [2, 6, 3]．

　非定数定常解の不安定性については，最近の研究により，拡散不安定化を仮定しなくとも不安定になることが分かった．従って，拡散誘導不安定化は主に解のダイナミクスに影響を与えることが分かる．本講演では，一般の reaction-diffusion-ODE system に関する一連の研究結果について紹介し，解のダイナミクスの考察を行いたい．

　これらの研究は，A. Marciniak-Czochra (University of Heidelberg), G. Karch (University of Wroclaw) との共同研究に基づくものである．

References

[1] S. Härting and A. Marciniak-Czochra, *Spike patterns in a reaction-diffusion-ODE model with Turing instability.* Math. Methods Appl. Sciences **37** (2014), 1377–1391.

[2] G. Karch, K. Suzuki and J. Zienkiewicz, *Finite-time blow-up in general activator-inhibitor system.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **36** (2016), 4997–5010.

[3] A. Marciniak-Czochra, S. Härting, G. Karch, and K. Suzuki, *Dynamical spike solutions in a nonlocal model of pattern formation.* Nonlinearity **31** (2018), 1757–1781

[4] G. Karch, K. Suzuki and J. Zienkiewicz, *Finite-time blow-up in general activator-inhibitor system.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **36** (2016), 4997–5010.

[5] A. Marciniak-Czochra, G. Karch, and K. Suzuki, *Instability of Turing patterns in reaction-diffusion-ODE systems.* J. Math. Biol. **74** (2017), 583—618.

[6] A. Marciniak-Czochra, G. Karch, K. Suzuki and J. Zienkiewicz, *Diffusion-driven blowup in reaction-diffusion-ODE systems.* Differential and Integral Equations **29** (2016), 715–730.