波束変換による波動作用素の値域の特徴づけとスペクトルとの関係[1]

米山 泰祐 （よねやま たいすけ）

東京理科大学 理学部第一部 数学科

e-mail: `yoneyama@rs.tus.ac.jp`

1 序

本研究では, 以下の時間に依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = H_0 u + V(t)u, & \text{on } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $i=\sqrt{-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ である. $V(t)$ は既知の実数値関数 $V(t,x)$ をかける掛け算作用素で, 短距離型条件すなわち, ある $\delta>1$ と $C>0$ があって,

$$|V(t,x)| \le C(1+|x|)^{-\delta}, \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \tag{2}$$

が成り立つと仮定する.

$V=V(t)$ が時間に依存しないとき, $H=H_0+V$ が自己共役になることから Stone の定理により, 強ユニタリー群 e^{-itH} が存在し, (1) の適切性が得られる. $V(t)$ が時間に依存する場合も V に時間に関する可微分性などの適切な条件を加えれば, 谷島 [8] による (1) の適切性が知られている. このとき, 時刻 0 における初期状態 u_0 から時刻 t における状態 $u(t)$ を与える作用素を $U(t,0)$ とおき, (1) に対する propagator と呼ぶ. 本講演では, $U(t,0)$ の存在を仮定する.

散乱理論は「(1) で $V\equiv 0$ としたときの解 “$e^{-itH_0}u_0$”」と「(1) の解 “$U(t,0)u_0$”」が “近い” かどうかを研究することが目的の一つである. この “近さ” を調べるために以下の作用素を定義する.

定義 1.1 (波動作用素)**.**

$$W_\pm := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t,0)^* e^{-itH_0}$$

とおき, $W_\pm$ を**波動作用素**と呼ぶ. ここで, $U(t,0)^*$ は $U(t,0)$ の共役を表す.

波動作用素は古くからスペクトル理論やフーリエ変換により多くの研究がなされ, $V(t)$ が時間に依存しないときは, 波動作用素が存在し, 値域が H に関する連続スペクトル部分空間で特徴づけられることが知られている (Cook [2], 黒田 [5], Mourre [6], Enss [3]). $V(t)$ が時間に依存するときは, 波動作用素が存在することは知られている (Yafaev [7]) が, 値域については北田–谷島 [4] による特徴づけが 1 つあるだけである.

本研究では Córdoba–Fefferman [1] により提唱された以下で定義される波束変換を用いることにより, [4] とは異なる波動作用素の値域の特徴づけを行う.

定義 1.2 (波束変換)**.** $\varphi\in\mathcal{S}\setminus\{0\}$ とする. このとき $f\in\mathcal{S}'$ に対し, φ から定まる波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

で定める.

[1]本講演は加藤圭一氏 (東京理科大) との共同研究に基づく.

2　主結果

我々は次の定理を得た.

定理 2.1 ([10])**.** 時間に依存するポテンシャル $V(t,x)$ に対し, (2) を仮定する．このとき, 波動作用素 $W_\pm$ は存在し, $\Gamma_{a,R} := \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \big| |x| \geq R$ または $|\xi| \leq a\}$ とおき, $\Phi(t) = e^{-itH_0}\Phi_0$, $\Phi_0 \in \{\Phi \in \mathcal{S} \big| \|\Phi\| = 1, \hat{\Phi}(0) \neq 0\}$ に対し,

$$D^\pm_{scat} := \overline{\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big| \exists a, R > 0; \lim_{t \to \pm\infty} \|\chi_{\Gamma_{a,R}} W_{\Phi(t)}[U(t,0)f](x + t\xi, \xi)\| = 0\}}$$

と定めると, $D^\pm_{scat}$ は Φ_0 に依らず, $\mathcal{R}(W_\pm) = D^\pm_{scat}$ となる．ここで, 閉包は L^2 における閉包を表す.

注意 2.2. 上記の場合のみならず, 変数係数ラプラシアンに対しても同様の主張が成り立つことが示せる (米山 [9]).

3　スペクトルとの関係

命題 3.1. $V = V(t)$ は時間に依存しないとし, (2) を仮定する．このとき $D^\pm_{scat}$ は H に関する連続スペクトル部分空間に一致する．さらに, (3) 内の極限の式と

$$\inf_{a,R>0} \left\| \int_0^\infty \chi_{\Gamma_{a,R}} W_{\Phi(t)}[Ve^{-itH}f](x + t\xi, \xi) dt \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = 0$$

は同値.

上記の命題により, [2], [5], [6], [3] の別証明や, H に関する連続スペクトル部分空間の波束変換による特徴づけが得られる.

参考文献

[1] A. Córdoba, C. Fefferman, Wave packets and Fourier integral operators, Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 979–1005.

[2] J. Cook, Convergence to the Møller wave matrix. J. math. Phys. 36 (1957), 82–87.

[3] V. Enss, Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, Commun. Math. Phys. 61 (1978), 285–291.

17 (1970), 214–258.

[4] H. Kitada, K. Yajima, A scattering theory for time-dependent long-range potentials, Duke Math. J. 49, (1982), 341–376.

[5] S. Kuroda, On the existence and the unitary property of the scattering operator. Nuovo Cimento, X. Ser. 12 (1959), 431–454.

[6] E. Mourre, Absence of singular spectrum for certain self-adjoint operators, Comm. Math. Phys. 78 (1981) pp.391–408.

[7] D. R. Yafaev, On the violation of unitarity in time-dependent potential scattering, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1517–1521 (English trans, from Russian).

[8] Yajima, K.: Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, Comm. Math. Phys. **110**, 415–426, (1987)

[9] T. Yoneyama, An application of wave packet transform to scattering theory for Schrödinger equations with variable coefficients, SUT J. Math. **52**, No. 2 (2016), 181–191.

[10] T. Yoneyama, K. Kato, Characterization of the ranges of wave operators for Schrödinger equations with time-dependent short-range potentials via wave packet transform, to apear in Funkcial. Ekvac.