Global existence of solutions to parabolic-elliptic chemotaxis system with logistic source

吉野 徳晃（東京理科大学）

E-mail: noriaki.yoshino.math@gmail.com

本研究では以下のロジスティック項を持つ走化性方程式系を扱う：

$$
\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) + \kappa u - \mu u^{\alpha} & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ \tau \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + v = u & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } (0,T) \times \partial\Omega, & \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \tau v(0,x) = \tau v_0(x). & \end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ 内の境界が滑らかな有界領域で, u_0 は非負の滑らかな初期値, $\tau \geq 0$, $\kappa, \mu \geq 0$, $1 < \alpha \leq 2$ は定数である．ロジスティック項を持たない通常の走化性方程式 ($\kappa = \mu = 0$ の場合) においては初期値の取り方により解が大域的に存在するか, 有限時間内に爆発するかが分かれることが知られている．これに対し, ロジスティック項をもつ場合（$\alpha = 2, \kappa, \mu > 0$ の場合）には一般に爆発が起きにくくなることが知られている．特に, 放物・楕円型 ($\tau = 0$) の場合には Tello-Winkler [1] により以下が示されている:

- $\alpha = 2$, $\kappa > 0$, $\mu > \frac{n-2}{n}$ $(n \geq 2)$ $\quad \Rightarrow \quad$ (KS) の有界な大域的古典解が存在する．

この結果より, 2 次元の場合には μ が正であれば解の爆発が起きないことがわかる．しかし高次元においては μ が小さいときにどうなるかは未解明な部分が多い．本研究では高次元においてこの問題に対し爆発が起きるための条件を考察し, 上記の大域解の存在のための条件を改良した．

References

[1] J. I. Tello, M. Winkler, *A chemotaxis system with logistic source.* Comm. Partial Differential Equations, **32** (2007), 849–877.