

Sobolev 型不等式が満たす非線形スケール不変性

猪奥 倫左 (東北大学大学院理学研究科)*

Sobolev の不等式

$$S_{n,p}\|u\|_{L^{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1)$$

について考察する．ここで $n \geq 2$, $1 < p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ であり, $S_{n,p}$ は $[1, 3]$ で得られた最良定数である．この最良定数は領域 Ω によらないことが知られているが, 最良定数が $W_0^{1,p}(\Omega)$ で達成されるかどうかは領域に依存して結論が異なる．実際, $\Omega = \mathbb{R}^n$ であれば不等式はスケール変換 $u_\mu(x) = \mu^{\frac{n-p}{p}} u(\mu x)$, $\mu > 0$ に関して不変であり, 最良定数 $S_{n,p}$ は Aubin-Talenti 関数 $U(x) = (a + b|x|^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{n-p}{p}}$, $a, b > 0$ で達成される．一方で, Ω が有界領域の場合には不等式のスケール不変性が破綻することに起因して, 最良定数 $S_{n,p}$ は $W_0^{1,p}(\Omega)$ で達成されない．

ここでは, Ω が原点中心の球 B_R の場合に, 伸縮とは異なるスケール変換を導入し, その下で不変な Sobolev 型不等式を構築する．

定理 1 (Sobolev 型不等式 [2]) $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 < p < n$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ とし, $u \in W_0^{1,p}(B_R)$ は球対称とする．このとき不等式

$$S_{n,p} \left(\int_{B_R} \frac{|u(x)|^{p^*}}{\left[1 - (|x|/R)^{\frac{n-p}{p-1}}\right]^{\frac{p(n-1)}{n-p}}} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p(B_R)} \quad (2)$$

が成り立つ．左辺の定数は最良であり, Aubin-Talenti 型関数

$$U_R(x) = \left[a + b \left\{ |x|^{-\frac{n-p}{p-1}} - R^{-\frac{n-p}{p-1}} \right\}^{-\frac{p}{n-p}} \right]^{-\frac{n-p}{p}}, \quad a, b > 0$$

で達成される．さらに不等式 (2) は, 以下の変換

$$\begin{cases} u_\lambda(x) := \lambda^{\frac{n-p}{p}} u(x_\lambda), \\ x_\lambda := \left[\lambda^{-\frac{n-p}{p-1}} |x|^{-\frac{n-p}{p-1}} + (1 - \lambda^{-\frac{n-p}{p-1}}) R^{-\frac{n-p}{p-1}} \right]^{-\frac{p-1}{n-p}} \frac{x}{|x|} \end{cases} \quad (3)$$

に関して不変である．

参考文献

- [1] Aubin, T., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differ. Geom. **11** (1976), 573–598.
- [2] Ioku, N., *Attainability of the best Sobolev constants in a ball*, Math. Ann. **375** (2018), 1–16.
- [3] Talenti, G., *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

* 〒980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉 6 – 3
e-mail: ioku@tohoku.ac.jp