シュタルク効果の下での逆散乱について

石田　敦英　(東京理大工)†

2019年4月27日 神楽坂解析セミナー

1. 導入

通常の2体自由シュレディンガー作用素に空間一様な定電場 $0 \neq E \in \mathbb{R}^n$ が印加された $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の自己共役作用素

$$-\hbar^2\Delta/(2m) - qE \cdot x \tag{1.1}$$

は自由シュタルクハミルトニアンと呼ばれる．ここで，$x \in \mathbb{R}^n$ は考えている粒子の位置，$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ はラプラシアン，$\hbar = h/(2\pi)$，$m > 0$，$0 \neq q \in \mathbb{R}$ はそれぞれプランク定数，質量，電荷といった物理定数を表す．以下では記法を簡単にするため，適当な回転とスケール変換により，$E = e_1 = (1, 0 \ldots, 0)$，$\hbar = m = q = 1$ として次のハミルトニアンを採用しよう．

$$H_0^{\mathrm{S}} = |p|^2/2 - x_1. \tag{1.2}$$

なお，p は粒子の運動量 $-\mathrm{i}\nabla = -\sqrt{-1}(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ である．

空間次元 $n \geqslant 2$ としておく．本講演では，粒子間に働く相互作用ポテンシャル V を摂動としたとき，波動作用素を用いて定義される散乱作用素の情報から V の一意性を導く逆問題についての結果（[I]）を報告する．特に先行研究 [W]，[N]，[AM]，[AFI] の結果とを比し，一意に定まる V のクラスが広がることについて詳しく述べたい．

ポテンシャル V の仮定は散乱理論において非常に重要な意味を持つ．詳細は以下で述べるが，大まかに言うと，実数値の掛け算作用素であり，遠方ではその値が消えているものを想定する．このようなポテンシャル関数 V を用いて，全ハミルトニアンを

$$H^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{S}} + V \tag{1.3}$$

で定義すれば，以下の仮定1.1の下，H^{S} も自己共役作用素として実現される．

さて，V の仮定に入ろう．$V = V^{\mathrm{vs}} + V^{\mathrm{s}} + V^{\mathrm{l}} \in \mathscr{V}^{\mathrm{vs}} + \mathscr{V}^{\mathrm{s}} + \mathscr{V}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{l}} \cup \mathscr{V}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{l}}$ と表されるとし，それぞれのクラスには以下の条件を課す．ただし，$\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$ であり，$F(\cdots)$ は集合 $\{\cdots\}$ の定義関数，また $\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ における作用素ノルムを表す．

仮定 1.1. $V^{\mathrm{vs}} \in \mathscr{V}^{\mathrm{vs}}$ は，$V^{\mathrm{vs}} = V_1^{\mathrm{vs}} + V_2^{\mathrm{vs}}$ とさらに2つに分かれており，特異性を許容する V_1^{vs} は，$|p|^2/2$ 有界でその相対限界は1より小さく，また $x_1 V_1^{\mathrm{vs}}$ も $|p|^2/2$ 有界とする．V_2^{vs} は $\mathbb{R}^n$ 上の有界な関数であり，V^{vs} としては次の空間遠方の減衰を仮定する．

$$\int_0^\infty \|V^{\mathrm{vs}}(x)\langle p \rangle^{-2} F(|x| \geqslant R)\| dR < \infty. \tag{1.4}$$

$V^{\mathrm{s}} \in \mathscr{V}^{\mathrm{s}}$ は C^1 級関数であり，空間の減衰として

$$|V^{\mathrm{s}}(x)| \leqslant C\langle x \rangle^{-\gamma}, \quad |\partial_x^\beta V^{\mathrm{s}}(x)| \leqslant C_\beta \langle x \rangle^{-1-\alpha}, \quad |\beta| = 1 \tag{1.5}$$

本研究は科研費（課題番号16K17633）の助成を受けたものである．
キーワード：scattering theory, Stark effect, inverse problem
† 〒125-8585 東京都葛飾区新宿6-3-1 東京理科大学工学部教養
e-mail: aishida@rs.tus.ac.jp

を仮定する．なお，γ と α は，$1/2 < \gamma \leqslant 1$ かつ $0 < \alpha \leqslant \gamma$ をみたす数である．$V^1 \in \mathscr{V}^1_{\mathrm{G}}$ は C^2 級関数で，以下の減衰を持つ．

$$|\partial_x^\beta V^1(x)| \leqslant C_\beta \langle x\rangle^{-\gamma_{\mathrm{G}}-\kappa|\beta|}, \quad |\beta| \leqslant 2. \tag{1.6}$$

ただし，γ_{G} と κ は，$0 < \gamma_{\mathrm{G}} \leqslant 1/2$ かつ $1-\gamma_{\mathrm{G}} < \kappa \leqslant 1$ をみたす数．最後に，$V^1 \in \mathscr{V}^1_{\mathrm{D}}$ も C^2 級関数であるが，空間の減衰としては

$$|\partial_x^\beta V^1(x)| \leqslant C_\beta \langle x\rangle^{-\gamma_{\mathrm{D}}-|\beta|/2}, \quad |\beta| \leqslant 2 \tag{1.7}$$

を仮定する．また，γ_{D} は $3/8 < \gamma_{\mathrm{D}} \leqslant 1/2$ をみたす数である．

2. 主結果

まず $V^1 \equiv 0$ の場合の結果から始める．この場合 V は短距離型と呼ばれ，仮定1.1の下，波動作用素

$$W^\pm = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}tH^{\mathrm{S}}} e^{-\mathrm{i}tH_0^{\mathrm{S}}} \tag{2.1}$$

の存在は知られており，これらを用いて散乱作用素 $S(V) = (W^+)^* W^-$ が定義される．

定理 2.1. $V_1, V_2 \in \mathscr{V}^{\mathrm{vs}} + \mathscr{V}^{\mathrm{s}}$ に対して，$S(V_1) = S(V_2)$ ならば $V_1 = V_2$ である．

次に $V^1 \not\equiv 0$ の場合，すなわち長距離型の場合を考える．V^1 の空間減衰の緩さゆえ，通常の波動作用素 $W^\pm$ の存在は保証されないが，$V^1 \in \mathscr{V}^1_{\mathrm{G}}$ に対しては，次のグラフ型修正波動作用素（例えば[G]）

$$W^\pm_{\mathrm{G}} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}tH^{\mathrm{S}}} e^{-\mathrm{i}tH_0^{\mathrm{S}}} e^{-\mathrm{i}\int_0^t V^1(e_1\tau^2/2)d\tau}, \tag{2.2}$$

ならびに，次のドラード型修正波動作用素（例えば[JY]）の存在が知られている．

$$W^\pm_{\mathrm{D}} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to\pm\infty} e^{\mathrm{i}tH^{\mathrm{S}}} e^{-\mathrm{i}tH_0^{\mathrm{S}}} e^{-\mathrm{i}\int_0^t V^1(p\tau+e_1\tau^2/2)d\tau}. \tag{2.3}$$

また，$V^1 \in \mathscr{V}^1_{\mathrm{D}}$ の場合においてもドラード型 $W^\pm_{\mathrm{D}}$ は存在する．よって $V^1 \in \mathscr{V}^1_{\mathrm{G}} \cup \mathscr{V}^1_{\mathrm{D}}$ に対して，ドラード型修正散乱作用素 $S_{\mathrm{D}}(V^1; V^{\mathrm{vs}} + V^{\mathrm{s}}) = (W^+_{\mathrm{D}})^* W^-_{\mathrm{D}}$ が定義される．

定理 2.2. $V^1 \in \mathscr{V}^1_{\mathrm{G}} \cup \mathscr{V}^1_{\mathrm{D}}$ とする．$V_1, V_2 \in \mathscr{V}^{\mathrm{vs}} + \mathscr{V}^{\mathrm{s}}$ に対して，$S_{\mathrm{D}}(V^1; V_1) = S_{\mathrm{D}}(V^1; V_2)$ ならば $V_1 = V_2$ である．

参考文献

[AFI] T. Adachi, Y. Fujiwara, A. Ishida, On multidimensional inverse scattering in time-dependent electric fields, *Inverse Problems* **29** (2013), no. 8, 085012, 24 pp.

[AM] T. Adachi, K. Maehara, On multidimensional inverse scattering for Stark Hamiltonians, *J. Math. Phys.* **48** (2007), no. 4, 042101, 12 pp.

[G] G. M. Graf, A remark on long-range Stark scattering, *Helv. Phys. Acta* **64**, (1991), no. 7, 1167–1174.

[I] A. Ishida, Inverse scattering in Stark effect, *arXiv*: 1811.09113.

[JY] A. Jensen, K. Yajima, On the long range scattering for Stark Hamiltonians, *J. Reine Angrew. Math.* **420** (1991), 179–193.

[N] F. Nicoleau, Inverse scattering for Stark Hamiltonians with short-range potentials, *Asymptotic Anal.* **35** (2003), no. 3–4, 349–359.

[W] R. Weder, Multidimensional inverse scattering in an electric field, *J. Funct. Anal.* **139** (1996), no. 2, 441–465.