

動的境界条件を持つ Cahn–Hilliard 方程式の大域可解性

梶原 直人 (東京理科大学理工学部数学科)*

1. 導入

本講演では、次の動的境界条件を持つ Cahn–Hilliard 方程式を考える。

$$(*) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta \mu, & \mu = -\Delta u + F'(u) & \text{in } J \times \Omega, \\ \partial_t u_\Gamma + b \partial_\nu \mu + c \mu_\Gamma = 0, & -\alpha \Delta_\Gamma u_\Gamma + \partial_\nu u + G'(u_\Gamma) = \frac{\mu_\Gamma}{b} & \text{on } J \times \Gamma, \\ u|_\Gamma = u_\Gamma, & \mu|_\Gamma = \mu_\Gamma & \text{on } J \times \Gamma, \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega, & u_\Gamma(0) = u_{0\Gamma} & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

ここで、 u, μ は秩序変数、化学ポテンシャルであり、 $J = (0, T)$ は時間区間 ($T < \infty$)、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は C^4 級の境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域、 α, b, c は正定数、 ν は Ω の外向き単位法ベクトル、“ $|_\Gamma$ ” は Γ へのトレース作用素、 Δ_Γ は Γ 上のラプラス・ベルトラミ作用素、 F, G は $F(u) = (1/4)(u^2 - 1)^2$, $G(u) = \frac{g_s}{2}u^2 - h_s u$ ($g_s > 0, h_s \neq 0$) を典型例とする非線形項とする。歴史的に Cahn–Hilliard 方程式は、体積保存 ($\frac{d}{dt} \int_\Omega u dx = 0$) を導く境界条件 $\partial_\nu \mu = 0$ かつエネルギー汎関数 $E_\Omega(u) := \int_\Omega [\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)] dx$ を減衰させる境界条件 $\partial_\nu u = 0$ や、境界との相互作用としてエネルギー $E_\Gamma(u_\Gamma) := \int_\Gamma [\frac{\alpha}{2}|\nabla_\Gamma u_\Gamma|^2 + G(u_\Gamma)] dS$ を加え、 $E(u, u_\Gamma) = E_\Omega(u) + E_\Gamma(u_\Gamma)$ を減衰させる動的境界条件 $\partial_t u_\Gamma - \alpha \Delta_\Gamma u_\Gamma + \partial_\nu u + G'(u_\Gamma) = 0$ の研究がある。一方、境界が多孔質媒質などの場合は体積保存自体が成立しない。そこで、[1] で上記の動的境界条件 $\partial_t u_\Gamma + b \partial_\nu \mu + c \mu_\Gamma = 0$ を課し、残りの境界条件は $E(u, u_\Gamma)$ を減衰させるように variational 境界条件 $-\alpha \Delta_\Gamma u_\Gamma + \partial_\nu u + G'(u_\Gamma) = \mu_\Gamma/b$ とした方程式 (*) を立て、大域解の一意存在が特異摂動法を用いて示された。本研究の主結果は最大 L_p 正則性の利用により、大域可解性を L_p 空間の枠組みで従来より簡潔に示したことであり、初期値の整合条件は指数 p で分類できる。今回の動的境界条件は、境界上での Allen–Cahn 方程式とも考えられる。一方、方程式の c の部分を $-c \Delta_\Gamma$ に変えたモデル (境界上 Cahn–Hilliard 方程式) が [2] により導出されており、以下の手法はこのモデルや総体積保存 ($\frac{d}{dt} (\int_\Omega u dx + \int_\Gamma u_\Gamma dS) = 0$) を導く $c = 0$ の場合に対しても同様に大域可解性を示すことができる。

2. 線形理論

最初のステップとして、次の線形化方程式を考える。

$$\begin{cases} \partial_t u + \Delta^2 u = f & \text{in } J \times \Omega, \\ \partial_t u_\Gamma - b \partial_\nu \Delta u + bc \partial_\nu u - \alpha bc \Delta_\Gamma u_\Gamma = g & \text{on } J \times \Gamma, \\ u|_\Gamma = u_\Gamma, & -\Delta u|_\Gamma - b \partial_\nu u + \alpha b \Delta_\Gamma u_\Gamma = h & \text{on } J \times \Gamma, \\ u(0) = u_0, & \text{in } \Omega, & u_\Gamma = u_{0\Gamma} & \text{in } \Gamma. \end{cases}$$

ここで未知関数は (u, u_Γ) である。解 u のクラスは $\mathbb{E}_1(J) := W_p^1(J; L_p(\Omega)) \cap L_p(J; W_p^4(\Omega))$ とし、外力 (f, g, h) や解 u_Γ 、初期値 $(u_0, u_{0\Gamma})$ のクラスの考察を行う。微分作用素 $\partial_t + \Delta^2, \partial_\nu \Delta, \Delta \cdot |_\Gamma$ を $\mathbb{E}_1(J)$ に施すことで、 (f, g, h) のクラスは次が期待される：

* e-mail: kajiwara_naoto@ma.noda.tus.ac.jp

$(f, g, h) \in \mathbb{F}(J) := \mathbb{F}_1(J) \times \mathbb{F}_2(J) \times \mathbb{F}_3(J)$
 $:= L_p(J; L_p(\Omega)) \times (W_p^{\kappa_0}(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^{4\kappa_0}(\Gamma))) \times (W_p^{\kappa_1}(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^{4\kappa_1}(\Gamma)))$
 $(\kappa_0 = 1/4 - 1/4p, \kappa_1 = 1/2 - 1/4p)$. さらに, u_Γ は方程式の構造より,

$$u_\Gamma \in \mathbb{E}_2(J) := W_p^{1+\kappa_0}(J; L_p(\Gamma)) \cap W_p^1(J; W_p^{4\kappa_0}(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^{2+4\kappa_1}(\Gamma))$$

が最適である. 初期値に関するトレース作用素を $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ に施し, 次がわかる.

$$(u_0, u_{0\Gamma}) \in \pi\mathbb{E}_1 \times \pi\mathbb{E}_2 := B_{p,p}^{4-4/p}(\Omega) \times B_{p,p}^{4-4/p}(\Gamma).$$

このような空間を用いることで, 可解性と外力のクラスを必要十分条件の形で述べた次の定理を導く. 本方程式を含む形での一般論が [3] で示されている.

定理 2.1. $1 < p < \infty$ を $p \neq 5/4, 5/2, 5$ とする. その時, 線形化方程式の解 $(u, u_\Gamma) \in \mathbb{E}_1(J) \times \mathbb{E}_2(J)$ が一意的存在するための必要十分条件は, $(f, g, h, u_0, u_{0\Gamma}) \in \mathbb{F}(J) \times \pi\mathbb{E}_1 \times \pi\mathbb{E}_2$ かつ次の整合条件を満たす場合である:

$$\begin{aligned} u_0|_\Gamma &= u_{0\Gamma} & \text{if } p > 5/4, \\ -\Delta u_0|_\Gamma - b\partial_\nu u_{0\Gamma} + \alpha b\Delta_\Gamma u_{0\Gamma} &= h|_{t=0} & \text{if } p > 5/2, \\ g|_{t=0} + b\partial_\nu \Delta u_0 - bc\partial_\nu u_0 + \alpha bc\Delta_\Gamma u_{0\Gamma} &\in B_{p,p}^{1-5/p}(\Gamma) & \text{if } p > 5. \end{aligned}$$

3. 非線形理論

方程式に f, g を加えた次の方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + \Delta^2 u = \Delta F'(u) + f & \text{in } J \times \Omega, \\ \partial_t u_\Gamma - b\partial_\nu \Delta u + bc\partial_\nu u - \alpha bc\Delta_\Gamma u_\Gamma = -b\partial_\nu F'(u) - bcG'(u_\Gamma) + g & \text{on } J \times \Gamma, \\ u|_\Gamma = u_\Gamma, \quad -\Delta u|_\Gamma - b\partial_\nu u + \alpha b\Delta_\Gamma u_\Gamma = -F'(u)|_\Gamma + bG'(u_\Gamma) & \text{on } J \times \Gamma, \\ u(0) = u_0, \quad \text{in } \Omega, \quad u_\Gamma = u_{0\Gamma} & \text{in } \Gamma. \end{cases}$$

非線形項の評価に必要な仮定: $p > (n+4)/4$, $F \in C^{4-}, G \in C^{2-}$ の下, 不動点定理を用いて, 時間局所解 $(u, u_\Gamma) \in \mathbb{E}_1(J_a) \times \mathbb{E}_2(J_a)$ を得る ($J_a := (0, a) \subset J$ で極大存在時間).

大域解に延長するため, 非線形項 F, G に適当な lower bound や upper bound を課す (講演で正確に述べる, この仮定は導入の典型例の F, G を含む). 次の主結果を得る.

定理 3.1. $n = 2, 3, p \geq 2$ を $p \neq 5/2, 5$ とする. $(f, g, u_0, u_{0\Gamma}) \in \mathbb{F}_1(J) \times \mathbb{F}_2(J) \times \pi\mathbb{E}_1 \times \pi\mathbb{E}_2$ で $u_0|_\Gamma = u_{0\Gamma}$ かつ次の整合条件を課す:

$$\begin{aligned} -\Delta u_0|_\Gamma - b\partial_\nu u_{0\Gamma} + \alpha b\Delta_\Gamma u_{0\Gamma} &= -F'(u_0)|_\Gamma + bG'(u_{0\Gamma}) & \text{if } p > 5/2, \\ g|_{t=0} + b\partial_\nu \Delta u_0 - bc\partial_\nu u_0 + \alpha bc\Delta_\Gamma u_{0\Gamma} - b\partial_\nu F'(u_0) - bcG'(u_{0\Gamma}) &\in B_{p,p}^{1-5/p}(\Gamma) & \text{if } p > 5. \end{aligned}$$

この時, 方程式は一意的に解 $(u, u_\Gamma) \in \mathbb{E}_1(J) \times \mathbb{E}_2(J)$ を持つ.

[1] C. G. Gal, A Cahn–Hilliard model in bounded domains with permeable walls, Math. Methods Appl. Sci., **29** (17) (2006) 2009–2036.

[2] G. R. Goldstein, A. Miranville, G. Schimerna, A Cahn–Hilliard model in a domain with non-permeable walls. Phys. D, **240** (8) (2011) 754–766.

[3] R. Denk, J. Prüss, R. Zacher, Maximal L_p -regularity of parabolic problems with boundary dynamics of relaxation type, J. Funct. Anal., **255** (11) (2008) 3149–3187.

[4] J. Prüss, M. Wilke, Maximal L_p -regularity and long-time behaviour of the non-isothermal Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Oper. Theory Adv. Appl., **168** (2006) 209–236.