

時間減衰する調和ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式の散乱について

川本 昌紀 (愛媛大学)*

1. 概略

時刻を $t \in \mathbf{R}$ 、位置を $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$ とした時、時間減衰する調和ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式は以下で与えられる；

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) = H_0(t)u(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbf{R}_x^n), \end{cases}$$

ここで、 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上のエネルギー $H_0(t)$ を

$$H_0(t) = -\Delta/2 + \sigma(t)|x|^2/2, \quad (\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2)$$

で定め、 $\sigma(t) \in L^\infty(\mathbf{R})$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$ となるものとする。ここで、 $\zeta_j(t)$ を

$$\zeta_j''(t) + \sigma(t)\zeta_j(t) = 0, \quad \begin{cases} \zeta_1(0) = 1, \\ \zeta_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta_2(0) = 0, \\ \zeta_2'(0) = 1, \end{cases}$$

で定めれば、系の古典軌道 $x(t)$ は $\zeta_j(t)$ を用いて $x(t) = \zeta_1(t)x + \zeta_2(t)p$ と表現される。ここで $p = -i\nabla$ である。さて、この $\sigma(t)$ が、ある $k \in [0, 1/4)$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \sigma(t) = k$, $0 \leq k < 1/4$ を満たせば、 $\lambda = (1 - \sqrt{1 - 4k})/2 \in [0, 1/2)$ について古典軌道は、

$$c_1 |t|^{1-\lambda} \leq \|x(t)\phi\|_{L^2} \leq C_1 |t|^{1-\lambda}, \quad 0 < c_1 \leq C_1, \quad |t| \gg 1, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

を満たすことが知られている [2]。この事実は粒子が減速しながら散乱するという奇妙な物理現象を示唆している。この減速効果により、波動作用素が存在の可否を決定するポテンシャルの減衰の閾値が $1/(1 - \lambda)$ となる。この事実を、石田敦英氏 (東京理科大学) との共同研究により明らかにした [1]。また、波動作用素の値域の特徴付けも行った [2]。また、このシュレーディンガー方程式の解の分散型評価は

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C |\zeta_2(t)|^{-n/2} \|u_0\|_{L^1}$$

となるが、この事実から非線形項 $|u|^{\rho-1}u$ を加えた非線形問題を考察した際、解が自由解に漸近するか否かを決定する非線形項の冪乗の閾値が $\rho = 1 + 2/n(1 - \lambda)$ となる。この事実を、村松亮氏 (東京理科大学) との共同研究により明らかにした [3]。本講演では、これらの結果の詳細について述べ、時間があれば証明の概略を説明する。

References

- [1] Ishida, A., Kawamoto, M.: Existence and nonexistence of wave operators for time-decaying harmonic oscillators, To appear
- [2] Kawamoto, M.: Quantum scattering with time-decaying harmonic potentials, arXiv:1704.03714
- [3] Kawamoto, M., Muramatsu, R.: Asymptotic behavior of solutions to nonlinear Schrödinger equations with time-dependent harmonic potentials, arXiv:1910.11548

* e-mail: kawamoto.masaki.zs@ehime-u.ac.jp