# Ground states to combined power-type nonlinear Schrödinger equations in three space dimensions [1]

菊池　弘明　(津田塾大学)

## 1. 基底状態の存在・非存在

この講演の前半では次の制約付きの最小化問題について考える:

$$m_\omega = \inf \left\{ \mathcal{S}_\omega(u) \mid u \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\},\ \mathcal{N}_\omega(u) = 0 \right\}, \tag{1}$$

ここで,

$$\mathcal{S}_\omega(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{1}{2^*}\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*},$$
$$\mathcal{N}_\omega(u) := \langle \mathcal{S}_\omega'(u), u\rangle = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*}.$$

$d \geq 3, \omega > 0, 1 < p < 2^* - 1$, $2^* = \frac{2d}{d-2}$ である. まず, 基底状態の存在・非存在について考える. ここで, 基底状態 (ground state) とは, 最小化問題 (1) の最小元のことをいう.

上の最小化問題 (1) は次の非線形楕円型方程式と関連する:

$$-\Delta u + \omega u - |u|^{p-1}u - |u|^{2^*-2}u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

具体的には, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が $\mathcal{S}_\omega$ の臨界点であることと $u$ が (2) の解であることは同値である. また, $\Phi_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が基底状態であるならば, $\Phi_\omega$ は (2) の解であり, さらに, (2) の非自明な解の中で対応する汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を最小にすることが知られている.

基底状態の存在については, Zhang and Zou [7] により, $d \geq 4$ かつ $1 < p < 2^* - 1$ のとき, もしくは, $d = 3$ かつ $3 < p < 2^* - 1 (= 5)$ のとき, すべての $\omega > 0$ に対して基底状態が存在することが知られている. 一方, $\omega > 0$ を十分小さくすると, どの場合でも基底状態が存在することが分かる. 詳しく述べると, [2] においては, $d \geq 3$ かつ $1 < p < 2^* - 1$ のとき, ある十分小さい $\omega_1 > 0$ が存在して, $0 < \omega < \omega_1$ ならば, 基底状態が存在することが知られている.

しかしながら, $d = 3$ かつ $1 < p \leq 3$ においては, すべての $\omega > 0$ に対しては, 基底状態の存在するかどうかは知られていないように思われる. この講演では, このことについて考えたい. 結果を述べるために記号を用意する. $\sigma > 0$ をソボレフの埋め込み $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ の最良定数とする, つまり,

$$\sigma := \inf \left\{ \|\nabla u\|_{L^2}^2 \mid u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \text{ with } \|u\|_{L^{2^*}} = 1 \right\}$$

この $\sigma$ に対して, $m_\omega < \frac{1}{d}\sigma^{\frac{d}{2}}$ ならば, $m_\omega$ の基底状態が存在することが知られている. そこで,

$$\omega_c := \sup \left\{ \omega > 0 \mid m_\omega < \frac{1}{d}\sigma^{\frac{d}{2}} \right\}$$

とおく. このとき, 以下の結果が得られた:

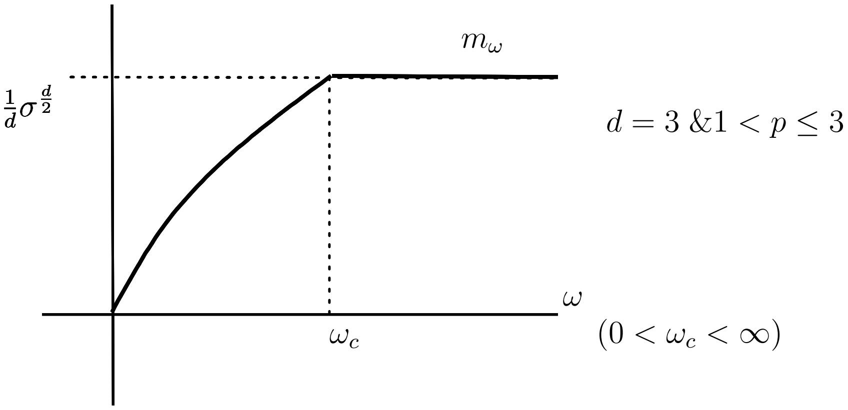
[1] この講演は赤堀公史 氏 (静岡大学), Slim Ibrahim 氏 (University of Victoria), 名和範人 氏 (明治大学) との共同研究に基づくものである

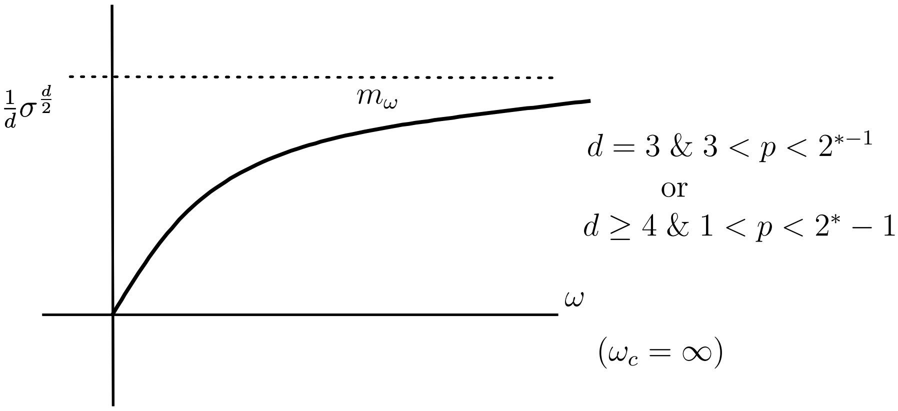
**定理 1.** $d=3$かつ$1<p\le 3$とする.

(i) $0<\omega_c<\infty$であり, $\omega\ge\omega_c$ならば, $m_\omega=\frac{1}{d}\sigma^{\frac{d}{2}}$,

(ii) $0<\omega<\omega_c$ならば, 基底状態が存在し, $\omega>\omega_c$ならば, 基底状態は存在しない.

**注意 1.** $\omega=\omega_c$のとき, 基底状態が存在するかどうかは不明であり, 今後の課題である.




定理 1では, $\omega>0$が十分大きいときに基底状態が存在しないことを示すのがポイントである. このことは背理法を用いて示すことができる. もし, 十分大きい$\omega>0$に対して, 基底状態$\Phi_\omega$が存在すると仮定すると, $\Phi_\omega$は(2) の解であり, さらに, 基底状態であることとGidas, Ni and Nirenberg [4] の結果から, $\Phi_\omega$は(位相や平行移動の差を除いて) 正値球対称であり, $r=|x|$に対して, 減少関数であることが分かる. このとき, $\Phi_\omega$を次のように$\dot{H}^1$や$L^{2^*}$ノルムを不変にするようなスケール変換する:

$$\widetilde{\Phi}_\omega(\cdot)=M_\omega^{-1}\Phi_\omega(M_\omega^{-\frac{2}{d-2}}\cdot),\qquad M_\omega=\|\Phi_\omega\|_{L^\infty}(=\Phi_\omega(0)).$$

このとき, $\widetilde{\Phi}_\omega$ は次を満たす:

$$-\Delta\widetilde{\Phi}_\omega+\alpha_\omega\widetilde{\Phi}_\omega-\beta_\omega\widetilde{\Phi}_\omega^p-\widetilde{\Phi}_\omega^{2^*-1}=0,$$

ここで, $\alpha_\omega=\omega M_\omega^{-\frac{4}{d-2}},\beta_\omega=M_\omega^{p-1-\frac{4}{d-2}}$である. すると, [1] により, $\lim_{\omega\to\infty}M_\omega=\infty,\lim_{\omega\to\infty}\alpha_\omega,\beta_\omega=0$であり,

$$\lim_{\omega\to\infty}\widetilde{\Phi}_\omega=W\qquad\text{in }\dot{H}^1\cap L^q(\mathbb{R}^d)\quad(\forall q>\frac{d}{d-2})$$

となることが知られている．ここで, $W$ は $W(0)=1$ となる Talenti 関数である, つまり,

$$W(x) := \left(1+\frac{|x|^2}{d(d-2)}\right)^{-\frac{d-2}{2}}, \qquad -\Delta W = W^{2^*-1}. \tag{3}$$

このとき, $\eta_\omega = \widetilde{\Phi}_\omega - W$ とおく．すると, $\eta_\omega$ は次を満たす:

$$\eta_\omega = (L_\infty + \alpha_\omega)^{-1}(-\alpha_\omega W + \beta_\omega W^p + N(\eta_\omega)),$$

ここで, $L_\infty = -\Delta - (2^*-1)W^{2^*-2}$ ($W$ のまわりでの線形化作用素) であり,

$$N(\eta_\omega) = (W+\eta_\omega)^{2^*-1} - W^{2^*-1} - (2^*-1)W^{2^*-1}\eta_\omega + \beta_\omega((W+\eta_\omega)^p - W^p).$$

すると, (3) の楕円型方程式は $\dot{H}^1$ スケールに対して不変であるため, その不変性から生じる 0 固有値を持つ:

$$L_\infty \Lambda W = 0, \qquad \Lambda W = \frac{d}{d\lambda}(\lambda^{\frac{d-2}{2}}W(\lambda\cdot))|_{\lambda=1} = \frac{d-2}{2}W + x\cdot\nabla W$$

このとき, $W$ が明示的に書けるため, $\Lambda W$ も明示的に書け, $|x|>0$ が十分大きいときは $|\Lambda W| \sim |x|^{-(d-2)}$ となる．それ故, $d \geq 5$ ならば, $\Lambda W \in L^2(\mathbb{R}^d)$ であるが, $d=3,4$ のときは, $\Lambda W \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ であることが分かる．つまり, $d=3,4$ のときは $L_\infty$ は "resonace" をもつ．resonance を持つかどうかはレゾルベント展開するときの特異性に違いが生じる．これを詳しく述べると, $R_0(-\alpha_\omega) = (-\Delta + \alpha_\omega)^{-1}$ とすると,

$$(L_\infty + \alpha_\omega)^{-1} = (1-(2^*-1)R_0(-\alpha_\omega)W^{2^*-2})^{-1}R_0(-\alpha_\omega)$$

であり, レゾルベント $(1-(2^*-1)R_0(-\alpha_\omega)W^{2^*-2})^{-1}$ は Jensen and Kato [5] の結果から次のように展開できる:

**補題 1.** $d=3$ とする．ある定数 $C_{-\frac{1}{2}} > 0$ が存在して,

$$(1-(2^*-1)R_0(-\alpha_\omega)W^{2^*-2})^{-1} = C_{-\frac{1}{2}}\alpha_\omega^{-\frac{1}{2}}\langle W^{2^*-2}\Lambda W, \cdot\rangle \Lambda W + O(1) \tag{4}$$

*as* $\lambda \to 0$ *in* $B(L^{2,-s}_{rad}(\mathbb{R}^d), L^{2,-s}_{rad}(\mathbb{R}^d))$. ここで,

$$L^{2,-s}_{rad}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \mid f \ \textit{is radial}, \ \|(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}} f\|_{L^2} < \infty \right\}$$

であり, $B(L^{2,-s}_{rad}(\mathbb{R}^d), L^{2,-s}_{rad}(\mathbb{R}^d))$ は $L^{2,-s}_{rad}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への有界線形作用素全体を表す.

**注意 2.** $d \geq 5$ のときは, *Murata [6]* により, $(1-(2^*-1)R_0(-\alpha_\omega)W^{2^*-2})^{-1}$ を展開したときは, $\alpha_\omega^{-1}$ の特異性が表れることが知られている.

講演では, (4) のレゾルベント展開を用いて, $\omega > 0$ が十分大きいときに, 基底状態が存在する仮定すると矛盾が導き出せることを大まかに説明したい.

## 2. 基底状態の非退化性

次に基底状態が存在する場合, その非退化性について考える. 非退化性は基底状態まわりでの発展方程式の解の大域挙動を解析するのにしばしば必要である. ここで, 非退化性は以下のように定義する:

**定義 1.** $\Phi_\omega$ を (2) の解とする. このとき, $\Phi_\omega$ が $H^1_{rad}(\mathbb{R}^d)$ で非退化 *(non-degenerate)* であるとは, $\operatorname{Ker} L_{\omega,+}|_{H^1_{rad}} = \{0\}$ となることである, ここで, $L_{\omega,+}$ は $\Phi_\omega$ まわりでの線形化作用素 $L_{\omega,+} = -\Delta + \omega - p|\Phi_\omega|^{p-1} - (2^* - 1)|\Phi_\omega|^{2^*-2}$ である.

[2] により, $d \geq 3$ のとき, $\omega > 0$ が十分小さいときには, 基底状態 $\Phi_\omega$ は $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ で非退化であることが知られている. さらに, [1] により, $d \geq 5$ のとき, $\omega > 0$ が十分大きいときも, 基底状態 $\Phi_\omega$ は $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ は非退化である. ここでは, $d = 3$ かつ $3 < p < 2^* - 1$ のときの基底状態 $\Phi_\omega$ の非退化性を得ることができた.

**定理 2.** $d = 3$ かつ $3 < p < 2^* - 1$ とする. ある十分大きい $\omega_2 > 0$ が存在して, $\omega > \omega_2$ ならば, 基底状態 $\Phi_\omega$ は $H^1_{rad}(\mathbb{R}^d)$ において非退化である.

定理 2 の証明は [1] とほぼ同じであるが, $d = 3$ のときは, Talenti 関数 $W$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ に属さないことにより, 少し工夫が必要である. 具体的には, Coles and Gustafson [3] が Lemma 1 から得たレゾルベント評価を用いる:

**補題 2.** $d = 3$ とし, $3 < r \leq \infty$ とする. ある定数 $C > 0$ が存在して, $\langle W^{2^*-2}\Lambda W, f\rangle = 0$ をみたす $f \in L^r_{rad}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\|(1 - (2^* - 1)R_0(-\alpha_\omega)W^{2^*-2})^{-1} f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^r}$$

が成り立つ.

## 参考文献


[1] Akahori, T., Ibrahim, S., Ikoma N., Kikuchi, H. and Nawa, H., Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities for high frequencies. To appear in Calc. Var. Partial Differential Equations.

[2] Akahori, T., Ibrahim, S., Kikuchi, H. and Nawa, H., Global dynamics for a nonlinear Schrödinger equation above a ground state with small frequency. To appear in Memoir of AMS. (arxiv:1510.08034).

[3] Coles, M. and Gustafson, S., Solitary Waves and Dynamics for Subcritical Perturbations of Energy Critical NLS. To appear in Differential Integral Equations.

[4] Gidas, B., Ni, W. M. and Nirenberg, L., Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$. Mathematical analysis and applications, Part A, pp. 369–402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981.

[5] Jensen, A. and Kato, T., Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. Duke Math. J. **46** (1979), 583–611.

[6] Murata, M., Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations. J. Funct. Anal. **49** (1982), 10–56.

[7] Zhang, J. and Zou, W., The critical case for a Berestycki-Lions theorem, Science China Math. **57** (2014), 541–554.