

Floquet ハミルトニアンに対する Mourre 評価について

清瀬周 (神戸大学大学院理学研究科数学専攻)

2019 年 10 月 26 日

時間周期的なポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素 $H(t) = p^2/2 + V(t, x)$ に対して、 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン $K = -i\partial_t + H(t)$ に対する新しい変形作用素を提起する。 K に対する変形作用素自体は横山氏 (1998,[2]) によって既に得られていたが、多体系への拡張が期待できないという困難が存在した。本講演では新しい形の多体系への拡張を見込んだ変形作用素を導入する。実際、本研究と横山氏の結果を合わせる事により、3 体系の場合の変形作用素が足立氏の最近の論文 [3] で構成された。

変形作用素とは、散乱理論において中心的役割を持つ評価の一つである Mourre 評価で鍵となる作用素の事で、本研究の変形作用素 $A_{\lambda_0, \delta}$ と Mourre 評価は次の様な形をしている。

$$f_\delta(K - \lambda_0)i[K, A_{\lambda_0, \delta}]f_\delta(K - \lambda_0) \geq 2f_\delta(K - \lambda_0)^2 + C_{\lambda_0, f_\delta}, \quad A_{\lambda_0, \delta} = (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \frac{x \cdot p + p \cdot x}{2}.$$

時間非依存の場合とは違い、時間依存問題では通常の変形作用素 $\hat{A}_0 = (x \cdot p + p \cdot x)/2$ では $i[K, \hat{A}_0]$ が K 有界にならないという困難があり、横山氏は $\tilde{A}_1 = \{x \cdot p(1+p^2)^{-1} + (1+p^2)^{-1}p \cdot x\}/2$ と p^2 のレゾルベントを掛けた変形作用素を導入する事で、初めて K に対する Mourre 理論の有効性を示した。一方で、多体系への拡張を得る際には、通常の変形作用素 $\hat{A}_0$ を $(\hat{A}_0)^a \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes (\hat{A}_0)_a$ と分解できる事が重要であるが、横山氏の $\tilde{A}_1$ にはそのような特性がなかった。そこで本研究では、 $D_t = -i\partial_t$ のレゾルベントを掛けて K 有界性の困難を回避しつつも、 $\hat{A}_0$ の部分は変えない変形作用素 $A_{\lambda_0, \delta}$ を導入して Mourre 評価を示した。この変形作用素は多体系への拡張の際に、 $(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \{(\hat{A}_0)^a \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes (\hat{A}_0)_a\}$ という分解ができるため、拡張が期待できる。実際、足立氏の最近の論文 [3] では、3 体系の場合に、

$$\begin{aligned} A_R &= \sum_{a \in \mathcal{A}} j_{a,R} A_a j_{a,R}, \quad A_a = A_{\text{AK}}^a + A_{Y,a}, \\ A_{\text{AK}}^a &= (3\omega/2 - D_t)^{-1} \otimes \frac{\langle x^a, p^a \rangle + \langle p^a, x^a \rangle}{2}, \\ A_{Y,a} &= \frac{\langle x_a, p_a(\omega/4 + (p_a)^2/2)^{-1} \rangle + \langle (\omega/4 + (p_a)^2/2)^{-1} p_a, x_a \rangle}{2} \end{aligned}$$

という変形作用素 A_R が構成されている。ここで A_{AK}^a に本研究の型の作用素が用いられていて、これは部分系ハミルトニアンと結び付けられた Floquet ハミルトニアンに対する変形作用素である。

一方、クラスター間ハミルトニアン $-\Delta_a/2$ に対しては横山氏の型の作用素 $A_{Y,a}$ が必要であり、3 体系への拡張においては本研究と横山氏の結果の両方が必要である事が明らかになった。

本講演は京都大学の足立匡義教授との共同研究に基づく。

参考文献

- [1] T. Adachi and A. Kiyose, On the Mourre estimates for Floquet Hamiltonians, Letters in Mathematical Physics, **109** (2019), No. 11, 2513–2529.
- [2] K. Yokoyama, Mourre theory for time-periodic systems, Nagoya Math. J. **149** (1998), 193–210.
- [3] T. Adachi, On the Mourre estimates for three-body Floquet Hamiltonians, preprint. arXiv:1904.10190