

3次元外部領域における L^r -Helmholtz-Weyl 分解

小藺 英雄

早稲田大学理工学術院・東北大学数理科学連携研究センター

概要

本稿は, Matthias Hieber 教授 (Darmstadt 工科大, ドイツ), Anton Seyferd 博士 (同工科大), 清水扇丈教授 (京都大), 柳澤卓教授 (奈良女子大) との共同研究に基づくものである.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ をコンパクトで滑らかな曲面 $\partial\Omega$ を境界にもつ外部領域とする. まず, 最初に幾つかの関数空間を導入しよう. $1 < r < \infty$ に対して $\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ および $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ を次式で定義する.

$$(0.1) \quad \dot{H}^{1,r}(\Omega) \equiv \{[u]; u \in L^r_{loc}(\bar{\Omega}), \nabla u \in L^r(\Omega)\}, \quad \dot{H}_0^{1,r}(\Omega) \equiv \{u \in \dot{H}^{1,r}(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

ここで, $[u]$ は関数 u の定数を法とする同値類を表す. すなわち $v \in [u]$ とは, Ω において $u - v = \text{const.}$ を意味する. ノルム $\|u\|_{\dot{H}^{1,r}} \equiv \|\nabla u\|_{L^r}$ によって $\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ および $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ は共に Banach 空間となる. $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ をノルム $\|\nabla u\|_{L^r}$ による $C_0^\infty(\Omega)$ の完備化とする. 定義から明らかに, $\dot{H}^{1,r}(\Omega) \subset \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ がすべての $1 < r < \infty$ について成り立つ. しかし, $r = 3$ を閾値として, 2つの関数空間 $\dot{H}_0^{1,r}(\Omega)$ と $\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ は異なることが知られている. 我々は更に, 関数空間 $\dot{V}^r(\Omega)$ 及び $\dot{V}_\sigma^r(\Omega)$ を以下で定義する.

$$(0.2) \quad \dot{V}^r(\Omega) \equiv \{u \in \dot{H}^{1,r}(\Omega); u \times \nu|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \dot{V}_\sigma^r(\Omega) \equiv \{u \in \dot{V}^r(\Omega); \text{div } u = 0\}.$$

ここで ν は, $\partial\Omega$ 上の単位外向き法線ベクトルを表すとする. 最後に L^r -調和ベクトル場 $X_{\text{har}}^r(\Omega)$ と $V_{\text{har}}^r(\Omega)$ を導入しよう.

$$(0.3) \quad X_{\text{har}}^r(\Omega) \equiv \{h \in L^r(\Omega); \text{div } h = 0, \text{rot } h = 0, h \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$(0.4) \quad V_{\text{har}}^r(\Omega) \equiv \{h \in L^r(\Omega); \text{div } h = 0, \text{rot } h = 0, h \times \nu|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

このとき, 次の命題がなりたつ.

命題 0.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ をコンパクトで滑らかな曲面 $\partial\Omega$ を境界にもつ外部領域とする. $1 < r < \infty$ とする. このとき, 調和ベクトル場 $X_{\text{har}}^r(\Omega)$ および $V_{\text{har}}^r(\Omega)$ は共に有限次元である.

$\dim X_{\text{har}}^r(\Omega)$ および $\dim V_{\text{har}}^r(\Omega)$ は, 境界 $\partial\Omega$ の位相幾何学的な不変量で決まる. 講演では, $L^r(\Omega)$ を $X_{\text{har}}^r(\Omega)$, $\dot{V}_\sigma^r(\Omega)$ 及び $\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ によって直和分解できることを紹介する.