

拡散ロジスティック方程式における 定常解と資源関数の積分比の非有界性について

久藤 衡介 (早大理工)*

次のような非線形楕円型方程式に対する Neumann 問題について考える:

$$\begin{cases} d\Delta u + u(m(x) - u) = 0, & u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする. (1) は, 拡散ロジスティック方程式の定常問題であり, 未知関数 $u(x)$ は生物種の定常的な空間分布を表す. ここで, $d > 0$ は生物種のランダムな拡散の度合いを表す係数である. また, $m(x)$ は資源関数とよばれ, 餌の分布と解釈できる. 本講演では, $m(x)$ は次のクラスに属すると仮定する.

$$m \in L_+^\infty(\Omega) := \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f\|_{L^\infty(\Omega)} > 0, f \geq 0 \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

このとき, (1) は, 各 $(d, m) \in \mathbb{R}_+ \times L_+^\infty(\Omega)$ に対して, 一意解 $u_{d,m} \in W^{2,p}(\Omega)$ をもち, その解は対応する放物型方程式の意味で大域安定であることが知られている.

(1) に関して Ni は, $(d, m) \in \mathbb{R}_+ \times L_+^\infty(\Omega)$ を様々に動かして, 種の終局分布と餌の L^1 ノルムの比 $\|u_{d,m}\|_{L^1(\Omega)} / \|m\|_{L^1(\Omega)}$ を出来るだけ大きくせよという問題を提示した. さらに Ni は, 空間 1 次元のケースではその比の上限は 3 であると予想した ([1, Abstract]). その予想は, Bai-He-Li [1] によって肯定的に解決されているが, その上限に至る定常解の列の形状については詳しくは分かっていなかった.

本講演の前半部では, 空間 1 次元において Bai たちが発見した $\|u_{d,m}\|_{L^1(\Omega)} / \|m\|_{L^1(\Omega)}$ を上限の 3 に近づける解の列に対して, 解の形状を考察する. 後半部では, 空間多次元の単位球 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ のケースでは, $(d, m) \in \mathbb{R}_+ \times L_+^\infty(\Omega)$ の列を巧く選ぶと, $\|u_{d,m}\|_{L^1(\Omega)} / \|m\|_{L^1(\Omega)}$ は無限大に発散することを示す.

参考文献

- [1] X. Bai, X. He and F. Li, An optimization problem and its application in population dynamics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144** (2016), 2161–2170.

本講演の前半部は井上順平氏 (電気通信大学大学院 情報理工学研究科 博士前期課程 2 年) の研究紹介であり, 後半部は井上氏と講演者の共同研究に基づく.

* e-mail: k-kuto@uec.ac.jp