

Minimal mass blow up solutions for nonlinear Schrödinger equations with a potential

松井 直己 (東京理科大学)

本研究では、次の $\mathbb{R}^N$ 内の L^2 臨界指数の冪型非線形項とポテンシャル項を持つ非線形シュレディンガー方程式

$$(NLS) \quad i\partial_t u + \Delta u + |u|^{\frac{4}{N}} u - Vu = 0$$

の最小質量爆発解を構成し、その blow up rate を導出する。

先行研究 [1] では、次の結果がある。

定理 ([1]). $N = 1$ または $N = 2$ で、 $V \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ とする。 $\partial_x^\beta V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ($|\beta| \leq 2$) とすると、(NLS) の爆発解 u が存在して、

$$\|u(t)\|_2 = \|Q\|_2, \quad \|\nabla u(t)\|_2 \sim t^{-1} \quad (t \searrow 0)$$

初期値の質量が未臨界質量 (即ち、 $\|u_0\|_2 < \|Q\|_2$) の場合、

$$V \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N) + \cdots + L^{p_l}(\mathbb{R}^N) \quad (p_j \geq 1 \text{ and } p_j > N/2)$$

を仮定すると、次を得る。

定理 1. $\|u_0\|_2 < \|Q\|_2$ のとき、 $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解は大域的かつ有界。

定理 1 より、最小質量爆発解は存在すれば臨界質量を持つ。最小質量爆発解の構成において、 V に対し以下を仮定する。

$K \in \mathbb{N}$: 十分大

$$V \in (L^{p_1}(\mathbb{R}^N) + \cdots + L^{p_l}(\mathbb{R}^N)) \cap C_{rad}^K(\mathbb{R}^N) \cap W^K(\mathbb{R}^N) \quad (p_j \geq 2 \text{ and } p_j > N/2)$$

$$(\partial_x^\alpha V)(0) = 0 \quad (0 \leq |\alpha| \leq K-1)$$

$$\partial_x^\alpha V \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) + \cdots + L^{r_{\nu'}}(\mathbb{R}^N) \quad (|\alpha| = K, \quad r_j \geq 2 \text{ and } r_j > N)$$

$$\partial_x^\alpha V \in L^{r'_1}(\mathbb{R}^N) + \cdots + L^{r'_{m'}}(\mathbb{R}^N) \quad (|\alpha| = K+1, \quad r'_j \geq 2 \text{ and } r'_j > N/2)$$

$$x \cdot \nabla V \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N) + \cdots + L^{q_m}(\mathbb{R}^N) \quad (q_j \geq 1 \text{ and } q_j > N/2)$$

このとき、次を得る。

定理 2. ある時間 $t_0 < 0$ と臨界質量球対称初期値 $u(t_0) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して、それに対応する (NLS) の解は $t = 0$ で爆発し、

$$\|\nabla u(t)\|_2 = |t|^{-1} (\|\nabla Q\| + o_{t \searrow 0}(1))$$

証明は [1] とは異なり、[2] の手法を用いる。

参考文献

- [1] V. Banica, R. Carles, T. Duyckaerts, Minimal blow-up solutions to the mass-critical inhomogeneous NLS equation. Comm. Partial Differential Equations 36 (2011), no. 3, 487-531.
- [2] S. Le Coz, Y. Martel, P. Raphaël, Minimal mass blow up solutions for a double power nonlinear Schrödinger equation. Rev. Mat. Iberoam. 32 (2016), no. 3, 795-833.