

On the relation between fully parabolic and parabolic-elliptic Keller–Segel systems

水上 雅昭 (東京理科大学 学振PD)*

1. 序

本研究では放物・楕円型の Keller–Segel 系に対する放物・放物型の Keller–Segel 系からのアプローチという手法により, 放物・楕円型の問題を放物・放物型の問題の延長として扱うことを目指す.

Keller–Segel 系は, ある化学物質に反応して移動する細胞性粘菌の運動を記述した数理モデルで, 放物・楕円型の問題と放物・放物型の問題に対する研究がそれぞれ進展してきた. しかし, 放物・楕円型の問題と放物・放物型の問題の関係は現段階では明らかにされていない. そこで, 本研究では, 放物・放物型の Keller–Segel 系の初期値境界値問題

$$(P-P) \quad \begin{cases} (u_\lambda)_t = \Delta u_\lambda - \chi \nabla \cdot (u_\lambda \nabla v_\lambda), & x \in \Omega, t > 0, \\ \lambda(v_\lambda)_t = \Delta v_\lambda - v_\lambda + u_\lambda, & x \in \Omega, t > 0, \\ \nabla u_\lambda \cdot \nu = \nabla v_\lambda \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u_\lambda(x, 0) = u_{\text{init}}(x), v_\lambda(x, 0) = v_{\text{init}}(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

の解 (u_λ, v_λ) と放物・楕円型の Keller–Segel 系の初期値境界値問題

$$(P-E) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \Omega, t > 0, \\ 0 = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_{\text{init}}(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

の解 (u, v) の関係について考える. ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き法線ベクトルであり, $\chi, \lambda > 0$, $0 \leq u_{\text{init}} \in C(\overline{\Omega})$, $0 \leq v_{\text{init}} \in W^{1,q}(\Omega)$ ($\exists q > n$) とする. 本研究の目的は,

(Q) $\lambda \searrow 0$ のとき問題 (P-P) の解 (u_λ, v_λ) は問題 (P-E) の解 (u, v) に収束するか?

という問題に対して解答を与えることである. 本研究の進展により, 放物・放物型の問題に対する結果から放物・楕円型の問題に対する結果を導けるようになることが期待される. ここで, 走化性項が感応性関数をもつ $-\nabla \cdot (u_\lambda \chi(v_\lambda) \nabla v_\lambda)$ で記述される走化性方程式については, [1] において問題 (Q) への肯定的な解答が与えられているが, χ が定数の場合である Keller–Segel 系に対してはまだ解答が与えられていない.

本講演では, χ が定数である Keller–Segel 系において, 初期値 $u_{\text{init}}, v_{\text{init}}$ の小ささの条件の下で得られた結果について報告する.

*e-mail: masaaki.mizukami.math@gmail.com

2. 主結果

本研究では放物・楕円型の Keller–Segel 系の問題 (P-P) の解と放物・放物型の問題 (P-E) の解の関係を導く次の結果を得た.

主定理 ([2, Theorem 1.1])

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) はなめらかな境界をもつ有界領域, $\chi > 0$ を定数とし, $u_{\text{init}} \in C(\overline{\Omega})$, $v_{\text{init}} \in W^{1,q}(\Omega)$ ($\exists q > n$) を非負関数とする. このとき, 任意の $p > \frac{n}{2}$ に対してある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, q, \chi, |\Omega|) > 0$ が存在し, $u_{\text{init}}, v_{\text{init}}$ が

$$(1) \quad \|u_{\text{init}}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon_0, \quad \|\nabla v_{\text{init}}\|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon_0$$

を満たしていると仮定するとき非負関数

$$\begin{aligned} u_\lambda &\in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)), \\ v_\lambda &\in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)) \cap L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); W^{1,q}(\Omega)) \end{aligned}$$

がすべての $\lambda > 0$ に対して一意的存在し, (u_λ, v_λ) は問題 (P-P) の古典解となる. さらに, 条件 (1) が満たされていると仮定すると, 非負関数

$$\begin{aligned} u &\in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)), \\ v &\in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)) \cap L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); W^{1,q}(\Omega)) \end{aligned}$$

が一意的に存在し, 次の2つの性質を満たす.

- すべての $T > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} u_\lambda &\rightarrow u \quad \text{in } C_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times [0, \infty)), \\ v_\lambda &\rightarrow v \quad \text{in } C_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)) \cap L_{\text{loc}}^2((0, \infty); W^{1,2}(\Omega)) \quad (\lambda \searrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つ.

- (u, v) は問題 (P-E) の古典解となる.

注意. この定理により, 初期値 $u_{\text{init}}, v_{\text{init}}$ の小ささの条件の下で, $\lambda \searrow 0$ のとき問題 (P-P) の解 (u_λ, v_λ) は問題 (P-E) の解 (u, v) に時間局所的に一様収束するという, 問題 (Q) に対する部分的な解答を与えることができた. さらに, この定理から, 問題 (P-E) の大域解の存在と有界性を得ることができる. また, 2次元の場合には, Nagai–Senba–Yoshida [3] の手法により, $\|u_{\text{init}}\|_{L^1(\Omega)} < \frac{4\pi}{\chi}$ という条件の下で同様の結果を示すことができる.

参考文献

- [1] M. Mizukami. The fast signal diffusion limit in a chemotaxis system with strong signal sensitivity. *Math. Nachr.*, **291** (2018), 1342–1355.
- [2] M. Mizukami. The fast signal diffusion limit in a Keller–Segel system. *J. Math. Anal. Appl.*, **472** (2019), 1313–1330.
- [3] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida. Application of the Trudinger–Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. *Funkcial. Ekvac.*, **40** (1997), 411–433.