

磁場項付きシュレーディンガー方程式の解のモジュレーションノルム評価¹

村松 亮 (東京理科大学大学院理学研究科数学専攻 修士課程 2 年)

本研究では、以下の磁場項付きシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} (\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ で、 $u(t, x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり、 $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$ ($j = 1, \dots, n$), $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\mathbf{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ で、 $\mathbf{a}(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_n(t, x))$ とする。

仮定. 任意の $k = 1, \dots, n$ に対し、

$$(2) \quad a_k(t, x) = \sum_{l=1}^n a_{l,k}(t) x_l, \quad a_{k,l} \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (l, k = 1, \dots, n)$$

であると仮定する。

定義 1 (波束変換). $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を、

$$W_\varphi f(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

によって定める。

定義 2 (モジュレーション空間). $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする。このとき、 $1 \leq p, q \leq \infty$ に対し、モジュレーション空間 $M_{\varphi}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を以下のように定義する：

$$M_{\varphi}^{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{M_{\varphi}^{p,q}} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_\varphi f(x, \xi)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} = \| \|W_\varphi f(x, \xi)\|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} < \infty \right\}.$$

本研究では、上記で定義したモジュレーション空間における (1) の解のノルム評価を考察した。

主定理. $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $T > 0$ とする。また、 $\varphi(t, x) = e^{it\Delta/2} \varphi_0(x) := \mathcal{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2/2} \mathcal{F} \varphi_0(x)$ (ただし、 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上のフーリエ変換) とし、 $\mathbf{a}(t, x)$ は仮定をみたすとする。

このとき、 $C_T > 0$ が存在して、 $\forall u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し (1) の解 $u(t, x) \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ について、

$$(3) \quad \|u(t, \cdot)\|_{M_{\varphi(t, \cdot)}^{p,p}} \leq C_T \|u_0\|_{M_{\varphi_0}^{p,p}}, \quad t \in [-T, T]$$

が成り立つ。

注. ベクトルポテンシャル $\mathbf{a}(t, x)$ が以下の仮定をみたす場合についても考察する：

仮定. 各 $j = 1, \dots, n$ に対し $a_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり、 $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し、

$$(4) \quad \exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \max_{1 \leq j \leq n} |\partial_x^\alpha a_j(t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{\rho - |\alpha|}.$$

参考文献

- [1] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, Journal of Functional Anal., **266**, 733–753 (2014).
- [2] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math.J., **64**, 223–231 (2012).
- [3] 谷島 賢二: シュレーディンガー方程式 I,II, 朝倉書店, (2014).

¹本研究は、加藤圭一氏 (東京理科大学) との共同研究である。