Lifespan for solutions to a semilinear heat equation on the stratified Lie groups

岡　康之　(大同大学教養部)

1. はじめに

本講演では、Stratified Lie groups $\mathbb{G}$ 上のサブラプラシアン $\mathcal{L}$ に付随する半線形熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = |u|^p, \ x \in \mathbb{G}, \ t > 0, \\ u(0,x) = \varepsilon u_0(x), x \in \mathbb{G} \end{cases} \tag{1.1}$$

を考察する。ここで, $p > 1$ かつ $\varepsilon > 0$ は十分小とする。特に非線形項が臨界の場合を扱い、ライフスパンの上からの評価を導出する。証明のアプローチは、ハイゼンベルグ群の場合に解の有限時間内爆発を示した Pohozaev and Véron ([4]) によるテスト関数法を Ikeda and Sobajima ([3]) に従って改良した手法を用いる。

2. Stratified Lie groups

Stratified Lie groups の定義は以下の通り。詳しくは、[1] を参照。リー群 $(\mathbb{R}^d, \circ)$ が次の 2 つの条件を満たすとき、 the stratified Lie group と呼び、$\mathbb{G} = (\mathbb{R}^d, \circ, \delta_\lambda)$ と記述する。

1. For $d_1 + \cdots + d_r = d$, $d_1, \cdots, d_r \in \mathbb{N}$ and $r \geq 1$, the decomposition $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_r}$ holds and for any $\lambda > 0$, the dilation $\delta_\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ defined by
$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, \cdots, x^{(r)}) := (\lambda x^{(1)}, \cdots, \lambda^r x^{(r)}),$$
where $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$ for $k = 1, \cdots, r$, is an automorphism of the group $\mathbb{G}$.

2. Let d_1 be as in (i) and $X_1, \cdots, X_{d_1}$ be the left invariant vector fields on $\mathbb{G}$ such that $X_k(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_k}|_0$ for $k = 1, \cdots, d_1$. Then Hörmander condition
$$\mathrm{rank}(\mathrm{Lie}\{X_1, \cdots, X_{d_1}\}) = d$$
holds for any $x \in \mathbb{R}^d$, that is, the iterated commutators of $X_1, \cdots, X_{d_1}$ span the Lie algebla $\mathfrak{g}$ of $\mathbb{G}$.

r は $\mathbb{G}$ のステップを表し、 $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} kd_k$ で $\mathbb{G}$ の等質次元を表す。 $r = 2$ の場合の典型的な例として、ハイゼンベルグ群が知られている。また、$\mathbb{G}$ のサブラプラシアンを $\mathcal{L} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{d_1} X_i^2$ で表す。 作用素 $\mathcal{L}$ は楕円型ではなく、準楕円型であることが知られている。さらに、$\mathcal{L}$ の等質ノルムを

$$|x|_{\mathbb{G}} = \left(\sum_{j=1}^{r} |x^{(j)}|^{\frac{2r!}{j}} \right)^{\frac{1}{2r!}}, \ x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) \in \mathbb{G}$$

と定義する。

3. 主結果

主結果は次となる。本講演では、主に定理２について証明を行う。

Theorem 1 (**Non existence of global weak solutions for** $1 < p \leq p_F$ **[2], [5]**)**.** *Let* $1 < p \leq p_F = 1 + 2/N$*, where* N *is the homogeneous dimension of* $\mathbb{G}$*. Assume that* $u_0 \in L^1(\mathbb{G})$ *satisfies*

$$\liminf_{R\to\infty} \int_{D_R} u_0(x)\ dx > 0,$$

where $D_R = B^{d_1}(R) \times B^{d_2}(R^2) \times \cdots \times B^{d_r}(R^r)$, $B^{d_i}(R^i) = \{x^{(i)} \in \mathbb{R}^{d_i} \mid |x^{(i)}| \leq R^i\}$*. Then there exists no global weak solution to (1.1).*

Theorem 2 (**Upper bound estimates for the lifespan [2], [5]**)**.** *Let* $1 < p \leq p_F = 1 + 2/N$*, where* N *is the homogeneous dimension of* $\mathbb{G}$*. If* u_0 *is in* $L^1(\mathbb{G})$ *satisfying*

$$\int_{\mathbb{G}} u_0(x)\ dx > 0$$

and supported by

$$\mathrm{supp}\ u_0 \subset \{x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(r)}) \in \mathbb{G},\ |x^{(1)}|^2 + |x^{(2)}| + \cdots + |x^{(r)}|^{\frac{2}{r}} < R_0\}$$

for some $R_0 > 0$*, then there exists* $\varepsilon_0 > 0$ *such that for any* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$*, we have*

$$T(\varepsilon) \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-(\frac{1}{p-1}-\frac{N}{2})^{-1}}, & \text{if } 1 < p < p_F, \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}), & \text{if } p = p_F, \end{cases}$$

where C *is a positive and independent of* ε *and*

$$T(\varepsilon) = \sup\{t > 0 \mid u \ \ \text{is a weak solution to (1.1) in } [0,T) \times \mathbb{G}\}.$$

参考文献

[1] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli and F. Uguzzoni, Stratified Lie groups and potential theory for their sub-laplacians, *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,* (2007).

[2] V. Georgiev and A. Palmieri, *Upper bounded estimates for local in time solutions to the semilinear heat equation on stratified Lie groups in the sub-Fujita case*, preprint.

[3] M. Ikeda and M. Sobajima, *Sharp upper bound for lifespan of solutions to some critical semilinear parabolic, dispersive and hyperbolic equations via a test function method,* Nonlinear Anal. 182 (2019), 57-74.

[4] S. Pohozaev and L. Véron, *Nonexistence results of solutions of semilinear differential inequalities on the Heisenberg group,* Manuscripta Math. 102 (2000), no. 1, 85-99.

[5] Y. Oka, *Lifespan for solutions to a semilinear heat equation on the stratified Lie groups,* preprint.