# メトリックグラフ上の半線形楕円型方程式の正値解について

柴田将敬（東京工業大学 理学院）

本研究は、倉田和浩氏（首都大学東京）との共同研究に基づく。

グラフ $G = (V, E)$ を考える。ここで、$V$ は頂点の集合であり、$E$ は辺の集合である。各辺 $e \in E$ が長さ $\ell_e$ の閉区間 $[0, \ell_e]$ と同一視されるものを、メトリックグラフと呼ぶ。本講演では、次のような、メトリックグラフ $G$ 上の半線形楕円型方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
& -\epsilon^2 \Delta u^{(e)} + u^{(e)} = |u^{(e)}|^{p-1} u^{(e)} && \text{for each } e \in E, && (1) \\
& u^{(e)}(v) = u^{(e')}(v) && \text{if } e \succ v \text{ and } e' \succ v \text{ for some } v \in V, && (2) \\
& \sum_{e \succ v} \partial_\nu u^{(e)}(v) = 0 && \text{for each } v \in V. && (3)
\end{aligned}
$$

ここで、$p > 1$ は与えられた定数、$\epsilon > 0$ はパラメータで、$u^{(e)}$ は $G$ 上の関数 $u$ の辺 $e \in E$ への制限である。$e \succ v$ は辺 $e$ が頂点 $v$ へ入射していることを意味する。また、そのときの頂点方向の微分を $\partial_\nu$ と書く。従って、(2) は内部の頂点で $u$ は連続につながっていることを意味し、(3) は内部の頂点で Kirchhoff 条件、端点で Neumann 境界条件を満たしていることを意味する。

$G$ 上の連続関数 $u$ で、各 $e$ 上では $u^{(e)} \in H^1([0, \ell_e])$ となっているもの全体は、

$$
\|u\|_{H^1(G)}^2 := \int_G |u'|^2 + u^2 \, dx = \sum_{e \in E} \int_0^{\ell_e} |(u^{(e)})'|^2 + (u^{(e)})^2 \, dx
$$

をノルムとする Hilbert 空間 $H^1(G)$ となる。$H^1(G)$ 上でエネルギー汎関数

$$
J_\epsilon(u, G) := \frac{\epsilon^2}{2} \int_G |u'|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_G |u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1} \int_G |u|^{p+1} \, dx
$$

で定めると、$J_\epsilon(\cdot, G)$ の臨界点 $u$ は、方程式 (1)–(3) の解となる。

ここで、

$$
E_\epsilon(G) := \inf_{u \in H^1(G) \setminus \{0\}} \sup_{t > 0} J_\epsilon(u, G)
$$

を考えると、標準的な議論により、$E_\epsilon(G)$ を実現する解 $u_\epsilon$ が存在し、それは $G$ 上の正値解となることがわかる。この解は最小エネルギー解と呼ばれる。最小エネルギー解の $\epsilon \to 0$ における漸近挙動について調べるのが本研究の目的である。

**■主結果**　$G$ は境界を一つ以上持つ、つまり、$V \setminus V_{\mathrm{int}} \neq \emptyset$ を仮定する。

(i) $\epsilon > 0$ が十分小さいとき、$u_\epsilon$ は境界 $v_\epsilon \in V \setminus V_{\mathrm{int}}$ で唯一つの極大値をとる。

(ii) $e_\epsilon \succ v_\epsilon$ となる辺 $e_\epsilon$ に対して、$e_\epsilon$ 上では、

$$u_\epsilon^{(e_\epsilon)}(\epsilon(x - v_\epsilon)) \to \Phi(x) \text{ as } \epsilon \to 0$$

が成立する。また、$G \setminus e_\epsilon$ 上では $u_\epsilon$ は 0 に一様収束する。ここで、$\Phi$ は

$$\begin{cases} -\Phi'' + \Phi = \Phi^p, \quad \Phi > 0 & \text{on } \mathbb{R}, \\ \Phi'(0) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \Phi(x) = 0 \end{cases}$$

の一意解である。

(iii) $e_\epsilon$ は境界を端点に含む辺のうち、一番長い辺になる。
つまり、$\ell_{e_\epsilon} = \max_{e \in E, e \succ v, v \in V \setminus V_{\mathrm{int}}} \ell_e$ が成り立つ。

この他、講演では、Dirichlet 境界条件の場合の解の漸近挙動や、より一般の正値解についての考察も述べたい。