

Local well-posedness for Schrödinger maps with helicity terms

清水 一慶 (京都大学大学院理学研究科)

本講演ではヘリシティ項付き Schrödinger maps の初期値問題について考える:

$$\begin{cases} \partial_t u = u \times (-\Delta u + b \nabla \times u) & \text{for } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (\text{SM})$$

ここで $u \equiv u(x, t) = {}^t(u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ を $\mathbb{R}^3$ -値の未知関数とし, 制約条件 $|u| \equiv 1$ を課す. また $b \in \mathbb{R}$ は定数で, $\times$ は $\mathbb{R}^3$ の元のベクトル積を表し, $\nabla \times u := (\partial_2 u_3, -\partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$ と定義する. この方程式はらせん磁性を持つ磁性体の磁化ベクトルが満たす発展方程式として提唱され, 右辺の第2項 (ここではヘリシティ項とよぶ) がらせん構造に寄与すると考えられている. $b = 0$ のときは Schrödinger map 方程式とよばれ, 自由 Schrödinger 方程式を $\mathbb{S}^2$ 値へ一般化したものに対応している.

(SM) の適切性はこれまで未解決であったが, 講演者はエネルギー法等を用いることで次の結果を得た.

定理 1. (i) $s \geq 3$ を整数とする. このとき (SM) は $L_t^\infty(\vec{k} + H^s(\mathbb{R}^2))$ のクラスで時間局所適切である. ただし, $\vec{k} = {}^t(0, 0, 1)$.

(ii) $I \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む区間とする. このとき, (SM) の解は $C(I : \vec{k} + L^2 \cap L^\infty) \cap L^\infty(I : \vec{k} + H^2)$ の範囲で一意的である.

次に初期値が zero-homotopic である場合を考える. ここで連続写像 $u_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ が zero-homotopic であるとは, u_0 が定値写像とホモトピー同値であることをいう. このとき講演者は, 解のより詳細な性質をいくつか導くことができた. そのうち本講演では次の性質に焦点を当てて議論を進める.

定理 2. $s > 2$ を実数とし, $u_0 \in \vec{k} + H^s$ が zero-homotopic であると仮定する. また $u(t) \in C([0, T_{\max}) : \vec{k} + H^s)$ を (SM) の解とする. (ただし $T_{\max}$ をこのクラスにおける解の最大存在時刻とする.) このときある $T = T(M, s) > 0$ が存在し, 次が成立.

$$T_{\max} > T, \quad \|u(t) - \vec{k}\|_{L_t^\infty H^s(0, T)} \leq C(M, s) \|u_0 - \vec{k}\|_{H^s}.$$

ただし, $M = \|u_0 - \vec{k}\|_{H^s}$.