

# 円環領域における優線形楕円型方程式の正值球対称解の一意性について

塩路直樹 (横浜国立大学大学院工学研究院)

円環  $A_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^N : a < |x| < b\}$  上の楕円型方程式

$$(1) \quad \Delta u(x) + f(u(x)) = 0 \quad \text{in } A_{a,b}, \quad u(x) = 0 \quad \text{on } \partial A_{a,b}$$

の正值球対称解の一意性について議論する。適当な変換により、(1) は、2 点境界値問題

$$(2) \quad u_{ss}(s) = g(s, u(s)) \quad \text{for } s \in (\alpha, \beta), \quad u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

に変形できる。(2) の正值解の一意性について、次の結果を得た。

定理 1.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  とし、 $g \in C^1([\alpha, \beta] \times [0, \infty))$  は

$$\begin{cases} g(s, u) > 0, & (s, u) \in (\alpha, \beta) \times (0, \infty), \\ u g_u(s, u) - g(s, u) \geq 0, & (s, u) \in [\alpha, \beta] \times [0, \infty) \end{cases}$$

を満たすと仮定する。さらに

$$\begin{cases} 2g(s, u) + (s - \alpha)G(s, u; c) \geq 0, & (s, u) \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \times (0, \infty), \\ G(s, u; c) \leq 0, & (s, u) \in (s, u) \in (\alpha, \beta) \times (0, \infty) \end{cases}$$

を満たす  $c \geq 0$  が存在すると仮定する。ただし、 $G(s, u; c) = g_s(s, u) + c(ug_u(s, u) - g(s, u))$  とする。このとき、(2) の正值解は高々 1 つである。

証明には、[2, Lemma 2.6], [4, Lemma 3.1], [5, Lemma 2.3] などを用いられたような恒等式と、[1, Lemma 2.2] が重要な役割を果たす。定理 1 は、[3, Theorem 2.4] の拡張である。特に  $c = 0$  とした場合が、[3, Theorem 2.4] と [1, Lemma 2.2] を組み合わせた結果に対応する。

定理 1 を、(1) の正值球対称解の一意性に応用する。 $f \in C^1([0, \infty))$  は、 $uf'(u) \geq f(u) > 0$  ( $u > 0$ ) を満たすとし、 $F(u) = uf'(u)/f(u)$  ( $u > 0$ ) と置く。Ni-Nussbaum [3] は、

$$n \geq 3, \quad 1 < F(u) \leq \frac{n}{n-2} + \frac{2}{(b/a)^{n-2} - 1}, \quad u > 0$$

を満たすとき、(1) の正值球対称解は高々 1 つであることなどを示した。この結果を改良し、次の結果を得た。

定理 2.  $n \geq 3$  のとき、

$$F(u) \leq \frac{n}{n-2} + \frac{2(2(b/a)^{\frac{n-2}{2}} - 1)}{((b/a)^{\frac{n-2}{2}} - 1)^2}, \quad u > 0$$

を仮定すると、(1) の正值球対称解は高々 1 つである。また、 $n = 2$  のとき、

$$F(u) \leq 5 + \frac{4(2\sqrt{b/a} - 1)}{(\sqrt{b/a} - 1)^2}, \quad u > 0$$

を仮定すると、(1) の正值球対称解は高々 1 つである。

講演では、この他にも定理 1 から得られる結果を示す。本講演は、渡辺宏太郎氏 (防衛大学校)、田中敏氏 (岡山理科大学) との共同研究に基づく。

## 参考文献

- [1] P. Korman, *On the multiplicity of solutions of semilinear equations*, Math. Nachr. **229** (2001), 119–127.
- [2] P. Korman and T. Ouyang, *Solution curves for two classes of boundary-value problems*, Nonlinear Anal. **27** (1996), 1031–1047.
- [3] W.-M. Ni and R. D. Nussbaum, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of  $\Delta u + f(u, r) = 0$* , Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 67–108.
- [4] S. Tanaka, *On the uniqueness of solutions with prescribed numbers of zeros for a two-point boundary value problem*, Differential Integral Equations **20** (2007), 93–104.
- [5] ———, *On the uniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden-Fowler differential equations*, Math. Bohem. **135** (2010), 189–198.