

On a continuum limit of discrete Schrödinger operators on square lattice (正方格子上の離散シュレディンガー作用素の連続極限について)

只野之英*

2019 年 5 月 25 日

本講演では、正方格子上の離散シュレディンガー作用素の連続極限について得られた結果を報告する。具体的には、正方格子の格子幅を 0 に近づける極限をとるとユークリッド空間上のシュレディンガー作用素に「収束する」ことをスペクトル論の立場から定式化し、その証明を与えた。本講演は中村周氏 (学習院大学) との共同研究 [1] に基づく。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) 上のシュレディンガー作用素 H を

$$H = H_0 + V(x), \quad H_0 = -\Delta, \quad \text{on } \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \quad (1)$$

とする。 H に対応する離散シュレディンガー作用素を次のようにして定義する。 $h > 0$ をメッシュ幅とする正方格子 $h\mathbb{Z}^d$ 上の関数空間 $\mathcal{H}_h$ を

$$\mathcal{H}_h = \ell^2(h\mathbb{Z}^d), \quad h\mathbb{Z}^d = \{(hz_1, \dots, hz_d) \mid z \in \mathbb{Z}^d\},$$

とおき、 $\mathcal{H}_h$ にはノルム $\|v\|_h^2 = h^d \sum |v(hz)|^2$, $v \in \mathcal{H}_h$ を与える。本講演で考える離散シュレディンガー作用素 H_h は、(1) と同じ V を用いて

$$H_h = H_{0,h} + V(z), \quad z \in h\mathbb{Z}^d, \quad (2)$$

$$H_{0,h}v(z) = h^{-2} \sum_{j=1}^d (2v(z) - v(z + he_j) - v(z - he_j)), \quad v \in \mathcal{H}_h \quad (3)$$

で与えられる ($e_j = (\delta_{ik})_{k=1}^d \in \mathbb{Z}^d$, $j = 1, \dots, d$)。

本講演では、 V に対して以下を仮定する。

仮定 1 V は $\mathbb{R}^d$ 上の実数値連続関数で下に有界である。ある $M > 0$, $c_1 > 0$ が存在して、 $(V(x) + M)^{-1}$ は一様連続であり

$$c_1^{-1}(V(x) + M) \leq V(y) + M \leq c_1(V(x) + M), \quad \text{if } |x - y| \leq 1$$

が成り立つ。

この仮定の下で H は本質的自己共役であり、 H_h は自己共役である。上記の仮定を満たす V としては、一様連続な有界関数、 $V(x) = a(1 + |x|)^\mu$, $a, \mu > 0$ が挙げられる。

* 東京大学大学院数理科学研究科 協力研究員, tadano@ms.u-tokyo.ac.jp

連続極限を考察するためには連続空間 $\mathcal{H}$ と離散空間 $\mathcal{H}_h$ の間に対応を与える必要があるため、次のようにして対応を構成する． $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $h > 0$ と $z \in h\mathbb{Z}^d$ に対して $\varphi_{h,z}(x) = \varphi(h^{-1}(x - z))$, $x \in \mathbb{R}^d$ とおき、対応 $P_h = P_{h,\varphi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_h$ を

$$P_h u(z) := h^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi_{h,z}(x)} u(x) dx, \quad h > 0, z \in h\mathbb{Z}^d.$$

で定義する．共役作用素は $P_h^* v(x) = \sum_{z \in h\mathbb{Z}^d} \varphi_{h,z}(x) v(z)$, $h > 0, v \in \mathcal{H}_h$ で与えられる． P_h が直交射影であることと $\{\varphi_{1,z} \mid z \in \mathbb{Z}^d\}$ が正規直交系であることは同値であり、これらは

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varphi}(\xi + n)|^2 = 1 \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (4)$$

と同値である．ただし $\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx$ とする．

仮定 2 φ は (4) および $\text{supp}[\hat{\varphi}] \subset (-1, 1)^d$ をみたす．

次の定理が本講演の主定理である．

定理 3 仮定 1, 仮定 2 の下で次が成り立つ．任意の $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して

$$\|P_h^*(H_h - \mu)^{-1} P_h - (H - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

さらに、もし $(V(x) + M)^{-1}$ が指数 $\alpha \in (0, 1]$ で一様ヘルダー連続であれば、任意の $0 < \beta < \alpha$ に対して

$$\|P_h^*(H_h - \mu)^{-1} P_h - (H - \mu)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C_\mu h^\beta \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

定理 3 の応用として、 H のスペクトル $\sigma(H)$ を H_h のスペクトル $\sigma(H_h)$ で近似することができる．

系 4 仮定 1, 仮定 2 の下で次が成り立つ．任意の $a, b \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H)$, $a < b$ に対して、 $a, b \notin \sigma(H_h)$ が十分小さい $h > 0$ で満たされ

$$\|P_h^* E_{H_h}((a, b)) P_h - E_H((a, b))\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

ただし $E_A(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ は自己共役作用素 A のスペクトル射影とする．

系 5 仮定 1, $M \gg 0$ の下で

$$d_H(\sigma((H_h + M)^{-1}), \sigma((H + M)^{-1})) \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

が成り立つ．ただし $d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\right\}$ はハウスドルフ距離とする．

参考文献

- [1] S. Nakamura, Y. Tadano: On a continuum limit of discrete Schrödinger operators on square lattice. Preprint 2019. arXiv:1903.10656 [math-ph]