Energy cascades for resonant nonlinear Schrödinger equations

高岡 秀夫（神戸大学理学研究科）

次の非線型シュレディンガー方程式を考える：

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^4 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L. \tag{1}$$

ここで，$\mathbb{T}_L$ は半径 $L/2\pi > 0$ の円周を表し，u は $\mathbb{R}$ 上の周期 L の関数とする．方程式は $\lambda > 0$ をパラメータとしたスケール変換

$$u(t,x) \mapsto \frac{1}{\lambda^{1/2}} u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right)$$

により不変であり，スケール不変 Sobolev 空間は $H^0 = L^2$ である．

本講演では，各周波数の波のエネルギー $|\widehat{u}(t,\xi)|^2$ $(\xi \in 2\pi\mathbb{Z}/L)$ の分布について考察する．方程式は 5 次のべき乗非線型を持つことにより，$\widehat{u}(t,\xi)$ の振幅がその効果によりお互いに影響し合う．すなわち，非線形相互作用において振幅の大きさがどのように時間発展するかについて調べることが目的である．ここで，$\widehat{u}(t,\xi)$ は $u(t,x)$ の空間変数に関する Fourier 係数で

$$\int_0^L e^{-ix\xi} u(t,x)\, dx, \quad \xi \in 2\pi\mathbb{Z}/L$$

で与えられ，反転公式 $u(t,x) = \int e^{ix\xi}\widehat{u}(t,\xi)\,(d\xi)_L$ を経由することにより，$H^s(\mathbb{T}_L)$ ノルムは次で定義される：

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}_L)} = \left(\frac{1}{L}\sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}/L} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(t,\xi)|^2\right)^{1/2}.$$

初期値問題の適切性については，J. Bourgain [1] により，H^s $(s > 0)$ において得られている．また，H^1 エネルギー保存則との組み合わせにより，$s \geq 1$ なら解は時間大域的に適切であることも知られている．他方，周期関数を課さない全空間の場合には，B. Dodson [3] により，L^2 において解の時間大域適切性が得られており，解は漸近的に散乱することが示されているが，周期関数のもとではこれは期待できない．

各周波数の波のエネルギー転換は，非線型性より引き起こされた共振過程で高次の振動成分を励起することによって生じる．そのことをみるために，方程式を線型方程式の基本解の周りで転換して $u(t,x) = \int a_\xi(t) e^{ix\xi - it\xi^2}\,(d\xi)_L$ と書くと，方程式 (1) は

$$i\dot{a}_\xi = \int_{\xi_1+\xi_3+\xi_5=\xi_2+\xi_4+\xi} a_{\xi_1}\overline{a_{\xi_2}} a_{\xi_3} \overline{a_{\xi_4}} a_{\xi_5} e^{-it\phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi)}\,(d\xi_1)_L (d\xi_2)_L (d\xi_3)_L (d\xi_4)_L$$

となる．ここで，振動数 $\phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 - \xi_6^2$ について，共振過程 $\phi = 0$ を次の周波数集合をもとに構成する．

Definition 1 Let k be a fixed integer. For $j \in \mathbb{Z}$, we set $\alpha_{1,j}$, $\alpha_{3,j}$, $\alpha_{2,j}$ and $\alpha_{4,j}$ as follows:

$$\alpha_{1,j} = 2\pi\left(3k + \frac{j}{L}\right),\ \alpha_{3,j} = \frac{2\pi j}{L},\ \alpha_{2,j} = 2\pi\left(k + \frac{j}{L}\right),\ \alpha_{4,j} = 2\pi\left(4k + \frac{j}{L}\right).$$

We set

$$\mathcal{R}_m = \{\alpha_{m,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq j < L\},$$

有限な周波数集合の上で，(1) の解を近似する近似方程式を幾つか構成し，本来の解と近似方程式の誤差評価には修正されたエネルギー法を用いることで次の主結果を得た．

Theorem 1 *Let $s > 1$ be a fixed number, and let $\nu > 0$ be a fixed small number. Let k and L be large numbers such that $L > \nu^{-c}$ for some $c > 0$. There exist a smooth global solution $u(t)$ to (1) such that for $|t| \ll (\log\langle 1/\nu \rangle)/\nu^2$,*

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{4} u_{\mathcal{R}_m}(t,x) + e(t,x), \tag{2}$$

where $u_{\mathcal{R}_m}$ is whose Fourier modes is supported on the frequency region $\mathcal{R}_m$ so that

$$\|u_{\mathcal{R}_1}(t)\|_{L^2} = 2\|u_{\mathcal{R}_3}(t)\|_{L^2}^2 = \nu\left(\frac{1}{2} - \nu^2 K(t)\right),$$

and

$$\|u_{\mathcal{R}_2}(t)\|_{L^2}^2 = 2\|u_{\mathcal{R}_4}(t)\|_{L^2}^2 = \nu\left(\frac{1}{2} + \nu^2 K(t)\right),$$

where $K(t) \approx \sin(\mathrm{Arctan}\frac{t}{cL^3})$. Moreover the error term $e(t)$ associated with the expression in (2) satisfies that

$$\|e(t)\|_s^2 \lesssim \left(\nu^{7/3} + \frac{\nu^3}{\langle k\rangle^{2(s-1)}}\right)e^{\nu^2 t} + \left(\nu^{5/3} + \frac{\nu}{\langle k\rangle^{4(s-1)}}\right)\left(e^{\nu^2 t} - 1\right).$$

方程式 (1) に対するエネルギー分布の考察については，B. Grébert, L. Thomann [4] により，周期が $L = 2\pi$ のもとで，4 つの周波数の間で考察されている．本講演では，周波数の数を周期の大きさに応じて，長周期の場合に引き上げることを目的とする．また，高次元の場合については，J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao [2] による，L^2 臨界型の非線型シュレディンガー方程式に対する研究結果がある．

References

[1] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part I: Schrödinger equation*, Geom. Func. Anal., 3 (1993), 107–156.

[2] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation*, Invent. Math., 181 (2010), 39–113.

[3] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical, nonlinear Schrödinger equation when $d = 1$*, Am. J. Math., **138** (2016), 531–569.

[4] B. Grébert and L. Thomann, *Resonant dynamics for the quintic nonlinear Schrödinger equation*, Ann. I. H. Poincaré, 29 (2012), 455–477.