

外部領域における熱方程式の勾配微分評価式とその 双線形評価式への応用

谷口 晃一 (名古屋大学大学院 多元数理科学研究科PD)*

本講演はVladimir Georgiev氏 (ピサ大学) との共同研究に基づいている.

1. 序

Ω を $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) における外部領域とする. 次の熱方程式の初期値・境界値問題

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t \in (0, \infty), \quad x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t \in (0, \infty), \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

を考え, 解 u の勾配微分評価式に関する結果を報告する. Ω が $\mathbb{R}^n$ あるいは半空間の場合は解の表現公式があり, 直接計算することにより任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$\|\nabla u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0, \quad f \in L^p(\Omega)$$

が得られる. しかし, Ω が外部領域の場合はディリクレ境界条件の影響により一般には時間減衰率が $t^{-1/2}$ ではないことが知られている (石毛-壁谷 [3] を参照). 本講演の目的は, 外部領域において初期値・境界値問題(1)の解に対する勾配微分評価式を考察し, その時間減衰率の最適性を明らかにすることである. さらに, 勾配微分評価式の応用として, 外部領域上のディリクレラプラシアンによって生成されるベゾフ空間における双線形評価式に関して得られた結果を紹介する.

2. 結果

次の結果が得られた.

定理 1 (Georgiev-谷口 [1]). $n \geq 2$ とし, Ω を $\mathbb{R}^n$ における $C^{1,1}$ 級の境界をもつコンパクトな集合の外部領域とする. このとき, 任意の $1 \leq p < \infty$ に対してある正定数 C が存在し, 初期値 $f \in L^p(\Omega)$ とする (1) の解 u に対して次が成り立つ.

$$\|\nabla u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \begin{cases} Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, & 0 < t \leq 1, \\ Ct^{-\mu} \|f\|_{L^p(\Omega)}, & t > 1. \end{cases} \quad (2)$$

ここで, μ は以下をみたす指数である.

$$\mu = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq p \leq n, \\ \frac{n}{2p}, & n < p < \infty. \end{cases}$$

次の結果から, $t > 1$ に対する評価式(2)の時間減衰率 $t^{-\mu}$ は最適であることがわかる.

* e-mail: koichi-t@math.nagoya-u.ac.jp

定理 2 (Georgiev-谷口 [1]). $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$ とし, $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき, 関数列 $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ と正の無限大に発散する正数列 $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ が存在し, 初期値 f_m とする (1) の解 u_m は次を満たす.

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m^\mu \|\nabla u_m(t_m)\|_{L^p(\Omega)}}{\|f_m\|_{L^p(\Omega)}} > 0.$$

注意 (石毛 [2]). ノイマン境界条件の場合はディリクレ境界条件のときと異なり, 勾配微分評価式の時間減衰率が悪くなることはない. 実際, ノイマン境界条件の場合は外部領域 Ω に対して次が成り立つ.

$$\|\nabla u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0, \quad f \in L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

3. 双線形評価式への応用

H を $L^2(\Omega)$ におけるディリクレラプラシアンとする.

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H) = \{f \in H_0^1(\Omega) : \Delta f \in L^2(\Omega)\}, \\ Hf = -\Delta f, \quad f \in \mathcal{D}(H). \end{cases}$$

このとき, H は $L^2(\Omega)$ 上の非負な自己共役作用素であり, 次のベゾフ空間が定義できる.

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(H)} := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{sj} \|\phi_j(\sqrt{H})f\|_{L^p(\Omega)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty.$$

ここで, $\{\phi_j\}_j$ は Littlewood-Paley の 2 進単位分解であり, $\phi_j(\sqrt{H})$ は H のスペクトル分解によって定義される作用素の関数である.

定理 3 (岩淵-松山-谷口 [4], Georgiev-谷口 [1]). $s, p, p_1, p_2, p_3, p_4, q$ を以下をみたす指数とする.

$$0 < s < 2, \quad 1 \leq p, p_1, p_2, p_3, p_4 \leq n, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

このとき, ある正定数 C が存在し任意の $f \in \dot{B}_{p_1,q}^s(H) \cap L^{p_3}(\Omega)$ と $f \in \dot{B}_{p_4,q}^s(H) \cap L^{p_2}(\Omega)$ に対して次が成り立つ.

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,q}^s(H)} \leq C \left(\|f\|_{\dot{B}_{p_1,q}^s(H)} \|g\|_{L^{p_2}(\Omega)} + \|f\|_{L^{p_3}(\Omega)} \|g\|_{\dot{B}_{p_4,q}^s(H)} \right). \quad (3)$$

注意 (岩淵-松山-谷口 [4]). $s > 2$ に対しては評価式 (3) は一般には成り立たない.

参考文献

- [1] V. Georgiev and K. Taniguchi, *On fractional Leibniz rule for Dirichlet Laplacian in exterior domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **39** (2019), no. 2, 1101–1115.
- [2] K. Ishige, *Gradient estimates for the heat equation in the exterior domains under the Neumann boundary condition*, Differential Integral Equations **22** (2009), no. 5-6, 401–410.
- [3] K. Ishige and Y. Kabeya, *Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no. 3, 861–898.
- [4] T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi, *Bilinear estimates in Besov spaces generated by the Dirichlet Laplacian*, arXiv:1705.08595 (2017).