

Stabilization in a two-species–two-chemicals chemotaxis-competition system*

吉宮 夏美 (東京理科大学大学院理学研究科数学専攻)

問題 初期条件と Neumann 条件を課した次の走化性方程式系の初期値境界値問題について考える:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla v) + \mu_1 u(1 - u - a_1 w), & x \in \Omega, t > 0, \\ 0 = \Delta v - v + w, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w - \chi_2 \nabla \cdot (w \nabla z) + \mu_2 w(1 - a_2 u - w), & x \in \Omega, t > 0, \\ 0 = \Delta z - z + u, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) は滑らかな境界をもつ有界領域, $\chi_1, \chi_2, \mu_1, \mu_2, a_1, a_2$ は正の定数, u, v, w, z は x, t を変数とする正值の未知関数とする. 問題 (P) は, 互いの生物が争う競合性と相手の生物が分泌する化学物質に引き寄せられる走化性をもつ, 2 種類の生物の動きを記述した数理モデルである.

先行研究と問題点 $a_1, a_2 \in (0, 1)$ のとき, Tu–Mu–Zheng–Lin [3] は Bai–Winkler [1] で使われていた手法で, ある条件の下で問題 (P) の解の漸近挙動を導いた. この手法のポイントは以下の 2 点である:

- エネルギー関数の構成 競合項の係数比のみで定まる標準的なエネルギー関数を用いる:

$$E(t) := a_2 \mu_2 \int_{\Omega} \left(u(\cdot, t) - u^* - u^* \log \frac{u(\cdot, t)}{u^*} \right) + a_1 \mu_1 \int_{\Omega} \left(w(\cdot, t) - w^* - w^* \log \frac{w(\cdot, t)}{w^*} \right).$$

ここで, $u^* := (1 - a_1)/(1 - a_1 a_2)$, $w^* := (1 - a_2)/(1 - a_1 a_2)$ とする.

- エネルギー関数の評価方法 4 変数の二次形式で表される積分量を Young の不等式により評価する.

標準的なエネルギー関数では, 走化性項の影響がまったく考慮されていない. さらに, エネルギー関数の評価では, 重みを付けない Young の不等式が用いられており, 改良できる可能性がある.

本研究 本研究では, $a_1, a_2 \in (0, 1)$ のとき, Mizukami [2] のアイデアに基づき, 上の問題点を解決した. 具体的には, $E(t)$ の第 2 項に適切な定数を掛けた修正エネルギー関数を導入した. また, エネルギー関数の評価では, Young の不等式の代わりに Sylvester の判定基準を用いて条件を改良した.

主結果

$a_1, a_2 \in (0, 1)$ とし, 問題 (P) の時間大域的古典解 (u, v, w, z) の存在を仮定する. μ_1/χ_1^2 , μ_2/χ_2^2 がある条件を満たすとき, 定数 $C, \ell > 0$ が存在して, すべての $t > 0$ に対して次の評価が成り立つ:

$$\|u(\cdot, t) - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t) - w^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w(\cdot, t) - w^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t) - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{-\ell t}.$$

注意. 主結果における μ_1/χ_1^2 , μ_2/χ_2^2 に対する条件については, 発表時に説明する.

参考文献

- [1] X. Bai, M. Winkler, *Equilibration in a fully parabolic two-species chemotaxis system with competitive kinetics*, Indiana Univ. Math. J., **65** (2016), 553–583.
- [2] M. Mizukami, *Improvement of conditions for asymptotic stability in a two-species chemotaxis-competition model with signal-dependent sensitivity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **13** (2020), 269–278.
- [3] X. Tu, C. Mu, P. Zheng, K. Lin, *Global dynamics in a two-species chemotaxis-competition system with two signals*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **38** (2018), 3617–3636.

*本講演は水上雅昭氏 (東京理科大学) と横田智巳氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.