

Boundedness in some attraction-repulsion chemotaxis system with signal-dependent sensitivities and logistic source*

千代 祐太朗 (東京理科大・理 M2)

次の誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性を, 初期条件と Neumann 境界条件の下で考える:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) + \nabla \cdot (u\xi(w)\nabla w) + \mu u(1-u), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w - w + u, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, χ, ξ は正值関数, $\mu > 0$ は定数であり, u, v, w は x, t を変数とする実数値の未知関数である. 問題 (1) において $w = 0$ の場合が Keller–Segel 系とよばれる走化性方程式系であり, 盛んに研究されているが, 特に χ が関数である場合には多くの課題が残されている. 問題 (1) はその Keller–Segel 系を拡張したモデルである.

問題 (1) において, 解の有界性を導く条件を決定することは重要な課題である. ここで, 解の有界性は

$$\exists C > 0; \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad (t > 0)$$

が成り立つことにより定義される. なお, 問題 (1) の解の有界性は次の場合に得られている:

- χ, ξ が定数関数である場合 (Tao–Wang [2] など).
- $w = 0$ かつ χ が関数である場合 (Mizukami–Yokota [1] など).

本研究では [1] での手法を拡張し, 下に有界な関数 $f := \exp(-r \int_0^v \chi(s) ds - \sigma \int_0^w \xi(s) ds)$ ($r, \sigma > 0$) を用いて解の有界性を導く. 具体的には, 最初に $\int_\Omega u^p f$ ($p > \frac{n}{2}$) に関する微分不等式を導き, その不等式から $\int_\Omega u^p f$ の評価を得る. 次に f の下からの評価から $\int_\Omega u^p$ の評価を導出し, 最後にその評価から u の有界性を導く. 上述の微分不等式を導く際, [1] では **2 変数** $x := u^{-1}|\nabla u|$, $y := \chi(v)|\nabla v|$ の 2 次形式

$$-b_1 x^2 + b_2 xy - b_3 y^2$$

($b_1, b_2, b_3 > 0$ は p と r に依存する定数) が 0 以下になるようなパラメータ r が存在するための, 関数 χ に対する条件を導いている. 一方, 本研究では, x, y に加えて $z := \xi(w)|\nabla w|$ も入った **3 変数** の 2 次形式

$$-a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz - a_4 y^2 + a_5 yz - a_6 z^2$$

($a_1, a_2, \dots, a_6 > 0$ は p と r, σ に依存する定数) が 0 以下になるような **2 つのパラメータ** r, σ が存在するための条件を決定する必要がある. 本研究では,

3 変数の 2 次形式が 0 以下になるような 2 つのパラメータを決定する方法の構築

により, 問題 (1) の解の有界性を導出するような関数 χ, ξ に対する条件を得た.

主結果

関数 χ, ξ はある条件を満たすとする. そのとき, 非負の初期値 $u_0 \in C(\bar{\Omega}) \setminus \{0\}$, $v_0, w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ に対して問題 (1) の時間大域的古典解 u, v, w が一意的に存在して有界である.

注意. χ, ξ に対する条件については発表時に説明する. なお, 主結果は [1] の結果の一般化になっている.

参考文献

- [1] M. Mizukami, T. Yokota, *A unified method for boundedness in fully parabolic chemotaxis systems with signal-dependent sensitivity*, Math. Nachr. **297** (2017), 2648–2660.
- [2] Y. Tao, Z.-A. Wang, *Competing effects of attraction vs. repulsion in chemotaxis*, Math. Models Methods Appl. Sci. **23** (2013), 1–36.

*本研究は水上 雅昭 氏 (東京理科大・理), 横田 智巳 氏 (東京理科大・理) との共同研究に基づく.