

Higher-Order Asymptotic Profiles of the Solutions to the Viscous Fornberg-Whitham Equation

福田一貴 (Ikki Fukuda)

信州大学 工学部 工学基礎部門

本講演では、粘性 Fornberg-Whitham 方程式という、以下の偏微分方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{aligned} u_t + \beta u u_x + \int_{\mathbb{R}} B e^{-b|x-\xi|} u_{\xi}(\xi, t) d\xi &= \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\beta \neq 0$ 及び $B, b, \mu > 0$ であるとする。この方程式において、 $\mu = 0$ とした方程式のことを Fornberg-Whitham 方程式と呼ぶ。Fornberg-Whitham 方程式は、Whitham (1967) 及び Fornberg-Whitham (1978) によって提唱された、水面波における砕波現象を記述する分散型方程式の一つであり、分散効果が非局所的な畳み込み積分の形で与えられるのが特徴である。このような積分型の分散項を持つ方程式における砕波現象の解析は、初めに [1] によって行われ、その後多くの研究者によって、数学解析・数値解析が進められてきた (e.g. [4, 5])。一方で、上記の方程式 (1) は、Fornberg-Whitham 方程式に対して、波の散逸を表現する粘性項 μu_{xx} を考慮に入れたものであり、非局所分散項付きの Burgers 方程式とみなせる。この場合には粘性項による散逸効果により、波が崩壊せず、時間大域解の存在を容易に示すことができる。Burgers 型の方程式については、初期値が空間遠方で減衰する場合、解は非線形散逸波と呼ばれる標準的な Burgers 方程式の自己相似解に漸近することと、その最適な漸近レートが知られている。特に、KdV-Burgers 方程式などの、分散項付き Burgers 方程式に対しては、分散項の影響が解の第 2 次漸近形に現れ、非線形散逸波への漸近レートが分散・散逸・移流のバランスにより変化することも知られている (cf. [2])。本研究では、初期値問題 (1) に対して、非局所分散項が三階微分型の分散項 u_{xxx} と比べて、解の漸近挙動にどのような影響を与えるのかに着目して研究を行った。具体的には解の形状を第 3 次漸近形まで導出し、KdV-Burgers 方程式に対する結果との比較を行った。

まず、解の主要部に関しては、初期値が $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) := \{u_0 \in L^1(\mathbb{R}); \|u_0\|_{L^1_1} := \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|(1+|x|)dx < \infty\}$ の条件の下で、以下で定義される非線形散逸波 $\chi(x, t)$ が漸近形となる：

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &:= \frac{1}{\sqrt{1+t}} \chi_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right), \quad \alpha := \frac{2B}{b}, \\ \chi_*(x) &:= \frac{\sqrt{\mu}}{\beta} \frac{(e^{\frac{\beta M}{2\mu}} - 1) e^{-\frac{x^2}{4\mu}}}{\sqrt{\pi} + (e^{\frac{\beta M}{2\mu}} - 1) \int_{x/\sqrt{4\mu}}^{\infty} e^{-y^2} dy}, \quad M := \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx. \end{aligned}$$

ここで、非線形散逸波 $\chi(x, t)$ は、以下の Burgers 方程式の自己相似解の修正であることに注意する。

$$\chi_t + \left(\alpha \chi + \frac{\beta}{2} \chi^2 \right)_x = \mu \chi_{xx}, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(x, t) dx = M.$$

次に、初期値に付加的な正則性を仮定することで、 $u - \chi$ の時間無限大での漸近展開の主要部に対応する、解の第 2 次漸近形を導出した。実際、KdV-Burgers 方程式の場合と本質的には同様の、以下の関数が漸近形となる：

$$\begin{aligned} V(x, t) &:= -\kappa d V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1} \log(1+t), \quad \alpha = \frac{2B}{b}, \\ V_*(x) &:= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu}} \frac{d}{dx} (\eta_*(x) e^{-\frac{x^2}{4\mu}}), \quad \eta_*(x) := \exp \left(\frac{\beta}{2\mu} \int_{-\infty}^x \chi_*(y) dy \right), \\ d &:= \int_{\mathbb{R}} (\eta_*(y))^{-1} (\chi_*(y))^3 dy, \quad \kappa := \frac{\beta^2 B}{4b^3 \mu^2} = \frac{\beta^2}{8\mu^2} \frac{2B}{b^3}. \end{aligned}$$

更に、初期値により強い正則性と付加的な可積分条件を仮定することで、より高次の漸近形の導出に成功した。実際、第3次漸近形は第2次漸近形と比べて、時間減衰率が $\log(1+t)$ だけ改善される。主結果を述べるため、まず、以下の関数 $W(x, t)$ と $\Psi(x, t)$ を定義する：

$$\begin{aligned} \underline{W(x, t) := \theta V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2B}{b},} \\ \theta := \int_{\mathbb{R}} z_0(x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) dx dt, \quad z_0(x) := \eta(x, 0)^{-1} \int_{-\infty}^x (u_0(y) - \chi(y, 0)) dy, \\ \rho(x, t) := -\eta(x, t)^{-1} \left(\frac{\beta}{2} (u - \chi)^2 + \frac{2B}{b} (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2 (u - \chi) + \frac{2B}{b^3} (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^4 \chi \right) (x, t), \\ \eta(x, t) := \eta_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) = \exp \left(\frac{\beta}{2\mu} \int_{-\infty}^x \chi(y, t) dy \right). \\ \underline{\Psi(x, t) := \Psi_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2B}{b},} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_*(x) &:= \frac{d}{dx} \left(\eta_*(x) \int_0^1 (G(1-\tau) * F(\tau))(x) d\tau \right), \quad G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}, \\ F(x, \tau) &:= F_* \left(\frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) \tau^{-\frac{3}{2}}, \quad F_*(x) := \frac{2B}{b^3} \eta_*(x)^{-1} \chi_*''(x) - \frac{\kappa d}{\sqrt{4\pi\mu}} e^{-\frac{x^2}{4\mu}}. \end{aligned}$$

これらの関数 $W(x, t)$ と $\Psi(x, t)$ の和として得られる以下の関数が、解の第3次漸近形となる：

$$\underline{Q(x, t) := W(x, t) + \Psi(x, t).}$$

より正確には、初期値問題 (1) の解と上記の関数 $\chi(x, t)$, $V(x, t)$, $Q(x, t)$ に対して、以下の結果が得られた：

主結果 ([3]-Theorem 1.5)

$s \geq 1$ とし、 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^s}$ が十分小さいとする。その時、初期値問題 (1) は唯一の時間大域解 $u \in C^0([0, \infty); H^s)$ を持つ。更に、 $s \geq 3$ とし、 $u_0 \in L_1^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$, $z_0 \in L_1^1(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{L_1^1} + \|u_0\|_{H^s}$ が十分小さいとすると、次が成り立つ：

$$\underline{\lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{1-\frac{1}{2p}+\frac{l}{2}} \|\partial_x^l (u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t) - V(\cdot, t) - Q(\cdot, t))\|_{L^p} = 0.}$$

ここで、 $2 \leq p \leq \infty$ であり、 l は $0 \leq l \leq s-3$ を満たす整数である。

定理の証明には、[2] で用いられた一般化 KdV-Burgers 方程式に対する解析手法を応用する。高次漸近形の導出の鍵となるアイデアは、以下の形式的な級数展開を用いた非局所分散項の分解である。

$$\int_{\mathbb{R}} B e^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = 2Bb(b^2 - \partial_x^2)^{-1} u_x = \frac{2B}{b} \left\{ \partial_x u + \frac{1}{b^2} \partial_x^3 u + \frac{1}{b^4} \partial_x^5 u + \frac{1}{b^6} \partial_x^7 u + \cdots \right\}.$$

参考文献

- [1] A. Constantin and J. Escher: *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations*, Acta Mathematica **181** (1998) 229-243.
- [2] I. Fukuda: *Asymptotic behavior of solutions to the generalized KdV-Burgers equation*, Osaka J. Math. **56** (2019) 883-906.
- [3] I. Fukuda and K. Itasaka: *Higher-order asymptotic profiles of the solutions to the viscous Fornberg-Whitham equation*, preprint, arXiv:2008.02696.
- [4] K. Itasaka: *Wave-breaking phenomena and global existence for the generalized Fornberg-Whitham equation*, preprint, arXiv:1802.00641.
- [5] 田中光宏: 水面波に関連するあるモデル方程式における砕波現象について, 数理解析研究所講究録 **1847** (2013) 64-72.