

Stability of solitary waves for Hirota-Satsuma coupled KdV system

長野 誠 (東京理科大学)

本研究では、次の Hirota-Satsuma coupled KdV system

$$\begin{cases} u_t - a(u_{xxx} + 6uu_x) = 2vv_x, \\ v_t + v_{xxx} + 3uv_x = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\text{HS})$$

の孤立波解の安定性を考える。ここで、 $u := u(t, x)$, $v := v(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数、 $a \in \mathbb{R}$ は定数である。

また、 $c > 0$ とし、定常問題

$$\begin{cases} -(1+a)\varphi_c'' - 3(1+a)\varphi_c^2 - \psi_c^2 + c\varphi_c = 0, \\ -2\psi_c'' - 2\varphi_c\psi_c + \frac{2}{3}c\psi_c = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

を考える。

以下、 $a > -1$, $c > 0$ とする。[1, Section 4.2] では、(1) の半自明解 $(\varphi_I, 0)$ と、(1) の非自明解 $(\varphi_{II}, \psi_{II})$ を考察している ($\varphi_I, \varphi_{II}, \psi_{II}$ の定義は、発表時に説明する)。この $(\varphi_I, 0)$, $(\varphi_{II}, \psi_{II})$ に対し、

$$(u(t, x), v(t, x)) := \left(\varphi_I \left(x + \frac{ac}{1+a}t \right), 0 \right) \quad (2)$$

$$(u(t, x), v(t, x)) := \left(\varphi_{II} \left(x - \frac{c}{3}t \right), \psi_{II} \left(x - \frac{c}{3}t \right) \right) \quad (3)$$

とすると、(2), (3) は (HS) の孤立波解である。さらに、 $(\varphi_{II}, \psi_{II})$ は (1) の解だから、 $(\varphi_{II}, -\psi_{II})$ もまた (1) の解である。この $(\varphi_{II}, -\psi_{II})$ に対し、

$$(u(t, x), v(t, x)) := \left(\varphi_{II} \left(x - \frac{c}{3}t \right), -\psi_{II} \left(x - \frac{c}{3}t \right) \right) \quad (4)$$

とすると、(4) もまた (HS) の孤立波解である。

[1, Theorem 4.3] にて、(HS) の孤立波解 (2) が安定となる十分条件は $a > -\frac{1}{4}$ と与えられ、また (HS) の孤立波解 (3) が安定となる十分条件は $-1 < a \leq -\frac{2}{3}$ と与えられた。一方で、 $(\varphi_{II}, \psi_{II})$ は $a = -\frac{1}{4}$ で $(\varphi_I, 0)$ から分岐していること、およびパラメーター a は連続的に変化することから、 $a = -\frac{1}{4}$ のときの (HS) の孤立波解 (2) の安定性、 $-\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{4}$ のときの (HS) の孤立波解 (3) の安定性、 $-1 < a < -\frac{1}{4}$ のときの (HS) の孤立波解 (2) の不安定性の成立が期待されるが、これらの証明はいずれも未解決課題として残されていた。これらの課題に対し、次の定理を得た。

定理. $a > -1$, $c > 0$ とする。 $a \geq -\frac{1}{4}$ のとき、(HS) の孤立波解 (2) は安定である。また $-1 < a < -\frac{1}{4}$ のとき、(HS) の孤立波解 (3), (4) は安定である。

証明は [1, Theorem 4.3] の方法とは異なり、[2] の方法に基づく。

参考文献

- [1] O. Lopes, Stability of solitary waves of some coupled systems. Nonlinearity **19** (2006), 95-113.
- [2] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 313-327.