

Finite-time blow-up in a parabolic–elliptic Keller–Segel system with logistic source and weak chemotactic sensitivity

田中 悠也 (東京理科大・理 M2)

次の放物・楕円型 Keller–Segel 系を初期条件及び Neumann 境界条件の下で考える:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta(u+1)^m - \chi \nabla \cdot (u(u+1)^{\alpha-1} \nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x \in B_R, t > 0, \\ 0 = \Delta v - v + u, & x \in B_R, t > 0. \end{cases}$$

ここで, $B_R \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3, R > 0$) は原点を中心とする半径 R の開球, $m \geq 1, \chi > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \mu > 0, \kappa \geq 1$ であり, u, v は x, t を変数とする実数値の未知関数である.

問題 (P) はある化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる走化性をもつ生物 (密度 u) の動きを表したモデルであり, $\alpha \in (0, 1)$ の場合は走化性が弱いことを表す. この問題において, 生物が集中するか, 拡散するかを解明することは一つの課題である. ここで, 前者の現象は数学的に次の意味での解の爆発に相当する:

$$\exists T^* \in (0, \infty); \quad \limsup_{t \nearrow T^*} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty.$$

問題 (P) は, 解の爆発を抑制するロジスティック項 $\lambda u - \mu u^\kappa$ をもつため, 解の爆発は起こりにくいと考えられるが, それに反して, 以下のような解の爆発についての結果が得られている:

- $\alpha = m = 1$ のとき, κ の小ささに関するある条件下での爆発解を与える初期値の存在 (Winkler [3]).
- $\alpha = 1$ かつ $1 \leq m < \frac{2n-2}{n}$ のとき, m と κ に対するある条件下での爆発解を与える初期値の存在 (Black–Fuest–Lankeit [1]).

しかし, $\alpha \neq 1$ の場合, 特に, 解の爆発が起こりにくいと考えられる, 走化性が弱い $\alpha \in (0, 1)$ の場合の解の爆発についての結果は得られていない. 本研究の目的は,

ロジスティック項をもち, 拡散が強いだけでなく, さらに走化性が弱い場合に解が爆発するか?

という疑問に対して肯定的な結果を得ることである. まず, $m = 1$ の場合に $\alpha \in (0, 1), \kappa > 1$ に対する強い制限下での結果を [2] で得ることができた. その後, [2] における条件の改良, 及び $m \geq 1$ の場合への拡張ができたので, その結果を発表する. ここでは, $m = 1$ とした場合の結果を述べる.

主結果

$m = 1$ とし, $\alpha > 0, \kappa \geq 1$ はある条件を満たすとする. そのとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, 任意の $L > 0, M > 0, M_1 \in (0, M)$ に対して, 以下を満たすある $r_0 \in (0, R)$ が存在する:

$p := \frac{n(n-1)}{(1-\alpha)n+1} + \varepsilon_0 (> n)$ とし, 非負の球対称な初期値 $u_0 \in C(\overline{B_R})$ が

$$u_0(x) \leq L|x|^{-p} \quad (x \in B_R \setminus \{0\}) \quad \text{かつ} \quad \int_{B_R} u_0 = M, \quad \int_{B_{r_0}} u_0 \geq M_1$$

を満たすならば, 問題 (P) の非負な古典解は有限時刻で爆発する.

注意. 主結果における $\alpha > 0, \kappa \geq 1$ に対する条件や $m > 1$ の場合の結果については発表時に説明する.

参考文献

- [1] T. Black, M. Fuest, J. Lankeit, *Relaxed parameter conditions for chemotactic collapse in logistic-type parabolic–elliptic Keller–Segel systems*, arXiv:2005.12089[math.AP].
- [2] Y. Tanaka, T. Yokota, *Blow-up in a parabolic–elliptic Keller–Segel system with density-dependent sublinear sensitivity and logistic source*, Math. Methods Appl. Sci. **43** (2020), 7372–7396.
- [3] M. Winkler, *Finite-time blow-up in low-dimensional Keller–Segel systems with logistic-type superlinear degradation*, Z. Angew. Math. Phys. **69**:40 (2018).