Well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order Schrödinger type equations with constant coefficients

津川 光太郎（中央大）
田中 智之氏（名大）との共同研究

アブストラクト

以下の高階の定数係数 Schrödinger 型方程式の初期値問題について考える．

$$\begin{cases} D_t u(t,x) = D_x^{2m} u(t,x) + \sum_{j=1}^{2m} (a_j D_x^{2m-j} u(t,x) + b_j D_x^{2m-j} \overline{u}(t,x)), \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \\ u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{T}). \end{cases}$$

ただし，$m \in \mathbb{N}$, $D_t = -i\partial_t$, $D_x = -i\partial_x$, 低階項の係数 $\{a_j\}, \{b_j\}$ は複素定数とし，$u(t,x)$ は複素数値関数とする．この方程式の最高階部分 $D_t u(t,x) = D_x^{2m} u(t,x)$ は，分散型の方程式である点に注意する．しかしながら低階の項の影響により，放物型方程式の様な強い平滑化効果を持ち時間一方向にのみ適切になる場合や，楕円型方程式の様に非適切になる場合がある．本講演の目的は，初期値問題の適切性の観点からこの方程式を分散型・放物型・楕円型の三種類に分類し，その必要十分条件を係数 $\{a_j\}, \{b_j\}$ に対する条件として記述することである．

$b_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, 2m)$ が成り立つときには，フーリエ変換を用いて解を表現することにより，容易に目的の結果を示すことが出来る．しかし $b_j \neq 0$ の場合には，未知関数の複素共役である $b_j D_x^{2m-j} \overline{u}(t,x)$ が方程式に含まれているため，フーリエ空間で考えた場合に $\widehat{u}(t,\xi)$ と $\widehat{u}(t,-\xi)$ の常微分方程式の連立系となる点がこの問題の難しさである．証明にはエネルギー法を用いる．低階の項による影響を利用するために補正項をどのように構成するかが証明のカギである．