Non-local シュレディンガー作用素における短距離-長距離条件の境界*

和田　和幸　（八戸高専）†

第 169 回神楽坂解析セミナー

1　概要

本講演では通常のシュレディンガー作用素や，準相対論的作用素らを包括的に含んだ non-local シュレディンガー作用素を考える．主となる関数の集合は次で与えられる:

$$\hat{\mathcal{B}} := \left\{ \Psi \in C^1(0,\infty) \middle| \Psi(\sigma) \geq 0, \frac{d\Psi}{d\sigma}(\sigma) \geq 0, \sigma \in (0,\infty) \right\}.$$

$\hat{\mathcal{B}}$ の特徴は，Bernstein 関数の集合 $\mathcal{B}$ を含んでいることである:

$$\mathcal{B} := \left\{ \Psi \in C^\infty(0,\infty) \middle| \Psi(\sigma) \geq 0, (-1)^k \frac{d^k\Psi}{d\sigma^k}(\sigma) \leq 0, \sigma \in (0,\infty), k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bernstein 関数の代表例として $\Psi(u) = u$, $\Psi(u) = u^{\frac{\alpha}{2}}\,(0 < \alpha < 2)$ が挙げられる．これらはそれぞれ通常のラプラシアン，分数べきラプラシアンに対応する．$\mathcal{B}$ の中には一部有界な関数も含まれていることに注意されたい（例えば $\Psi(u) = u/(r+u)$, $r > 0$ など）.

$n \in \mathbb{N}$ を空間の次元，Δ を n 次元ラプラシアン，$\Psi \in \hat{\mathcal{B}}$，ポテンシャル $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ は実数値関数で，$|V(x)| \to 0$ (as $x \to \infty$) とする．Non-local シュレディンガー 作用素を次で定義する：

$$H^\Psi := H_0^\Psi + V, \quad H_0^\Psi := \Psi(-\Delta) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^n)$$

これら二つの自己共役作用素の組 $(H^\Psi,\, H_0^\Psi)$ に対して以下の波動作用素

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH^\Psi} e^{-itH_0^\Psi}$$

の存在・非存在の境界を V の $|x| \to \infty$ における減衰レートで特徴付けることが本研究の目的である．これにより，遠方で減衰するようなポテンシャルの集合を大きく短距離/長距離と分類できる．

Ψ に適切な仮定を課すことで，V が $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\gamma}$ $(\gamma > 1)$ を満たすときには波動作用素が一般に存在し，$V(x) = \kappa\langle x\rangle^{-\gamma}$ $(0 < \gamma \leq 1)$ のときには波動作用素が存在しないことを証明した．これにより波動作用素が存在する・しないの閾値は $\gamma = 1$ であることを明らかにした [1]．これは [2] において扱われていなかった massless な準相対論的 Schrödinger 作用素の場合や，指数が小さい分数べきラプラシアンの場合を包括している．本講演では，これらの結果の詳細について述べ，時間があれば証明の概略について説明をしたい．

参考文献

[1] A. Ishida and K. Wada, Threshold Between Short and Long-range Potentials for Non-local Schrödinger Operators, Math. Phys. Anal. Geom (2020), 23, 32.

[2] A. Ishida, Non-existence of standard wave operators for fractional Laplacian and slowly decaying potentials, East Asian J. Appl. Math. **9**, no.2, 233-240 (2019).

---

* 本研究は石田敦英氏（東京理科大）との共同研究に基づいている．

† E-mail: wada-g@hachinohe.kosen-ac.jp