

移流拡散方程式の大きい前方自己相似解の存在

和久井洋司 (東京理科大学)*

本発表では, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) における次の移流拡散方程式の初期値問題の大きな前方自己相似解の存在について考察する:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\psi = \psi(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数である. 移流拡散方程式 (1) の第二式が Poisson 方程式であることから, Laplacian の基本解 $E_n(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-(n-2)}$ に対して ψ は常に $\nabla \psi = \nabla E_n * u$ を満たすとする.

移流拡散方程式 (1) は尺度不変性を持つ. すなわち, (1) の解 (u, ψ) と $\lambda > 0$ に対して, 尺度変換を施した関数 $u_\lambda(t, x) = \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x)$ と $\psi_\lambda(t, x) = \psi(\lambda^2 t, \lambda x)$ の組 $(u_\lambda, \psi_\lambda)$ もまた (1) の解となり, この尺度変換によって不変な Lebesgue 空間は $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ である. 非負な初期値に対応する解は非負となり, 方程式の第一式が連続の式であることから質量保存則すなわち, 初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \geq 0$ に対応する解 $u(t, x)$ について,

$$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1, \quad t > 0$$

が成立する. 尺度不変性に深く関連した方程式 (1) の自己相似解は, 方程式の解の漸近挙動を理解する上で重要となることが期待されるが実際に, 移流拡散方程式に類似した構造を持ち, 構造が単純なべき乗型非線形項を持つ熱方程式の初期値問題において, その方程式の前方自己相似解が初期値問題の解の時間大域挙動を分類する重要な役割を果たしていることが知られている (cf. [3], [6], [9]). 移流拡散方程式 (1) は Chandrasekhar 解とよばれる自己相似な特異定常解

$$u_C(x) = \frac{2(n-2)}{|x|^2} \quad (2)$$

を持つがその表示から, 既知の解の枠組みで要求される関数空間 $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属さず, 尺度不変性と関連した Lebesgue 空間 $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ にも属さないことがわかる. 一方で先述の通り, 前方自己相似解が解の時間大域挙動を理解する際に重要な役割を果たす可能性があるため, 既存の解空間の枠組みよりも広く, さらに Chandrasekhar 解 u_C が属しかつ尺度不変性と関連する関数空間の枠組みで解の時間大域挙動を考察することは重要である (cf. [5], [7]).

例えば, Biler-Karch-Pilarczyk [1] は Chandrasekhar 解 u_C を含む Morrey 空間を基礎に, 初期値問題の解の存在および時間大域存在のための十分条件を, Chandrasekhar 解 u_C に関連した定量的表現により与えた. Senba [8] は, 球対称な初期値 $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ で $u_0(x) \leq u_C(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) を満たすものに対して, 対応する (球対称な) 古典解の時間大域存在を示した. さらに, Kozono-Sugiyama [4] では初期値が十分小さい場合に, その初期値に対応する前方自己相似解の存在が示された. しかし, Biler-Karch-Pilarczyk [1] と Senba [8] は共に Chandrasekhar 解 u_C と同程度の特異性を持つ初期値を含んでおらず, Kozono-Sugiyama [4] では標準的な縮小写像の原理により解を構成しているため, 初期値に対する小ささの仮定が必要とされている.

そこで, $0 < \epsilon < 1$ に対して初期値を $u_0(x) = \epsilon u_C(x)$ で与えたときの前方自己相似解の存在を考察し, 次の定理を得た ([2, Theorem 1.1]).

* e-mail: hiroshi.wakui@rs.tus.ac.jp

定理 1. $n \geq 3$ とし, $0 < \epsilon < 1$ とする. このとき, 初期値 $u_0(x) = \epsilon u_C(x)$ に対応する移流拡散方程式 (1) の正值球対称で滑らかな前方自己相似解 u^* が存在して, u^* の形状関数 U は有界となる. すなわち, 移流拡散方程式 (1) の解 u^* が形状関数 $U \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ を用いて

$$u^*(t, x) = \frac{1}{t} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

と表される.

さらに, ある次元 n のみに依存する正定数 $1 < C_n < 2$ が存在して, $\epsilon > C_n$ ならば時間局所解は存在しない.

注意. 定理 1 における定数 C_n はより具体的に書き表すことができる. 実際,

$$C_n = \frac{16}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{s^{n+1}}{2(n-2) + 4s^2} e^{-s^2} ds$$

であり, より精密に

$$1 < \frac{2}{n-1} \left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right)^2 < C_n < \left(\frac{2}{n-2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} < \frac{n-1}{n-2} \leq 2$$

となることが示せる.

本発表では, 前方自己相似解の構成について述べる. この研究は Wrocław 大学の P. Biler 氏および G. Karch 氏との共同研究に基づく. ([2])

References

- [1] Biler, P., Karch, G., Pilarczyk, D., J. Differential Equations **267** (2019), pp. 6352 – 6369.
- [2] Biler, P., Karch, G., Wakui, H., *Large self-similar solutions of the parabolic-elliptic Keller-Segel model*, arXiv:2001.02571
- [3] Galaktionov, V. A., Vázquez, J. L., Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), pp. 1 – 67.
- [4] Kozono, H., Sugiyama, Y., Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), pp. 1467 – 1500.
- [5] Kozono, H., Sugiyama, Y., Takada, R., J. Maht. Anal. Appl. **365** (2010), pp. 60 – 66.
- [6] Naito, Y., J. Differential Equations **253** (2012), pp. 3029 – 3060.
- [7] Senba, T., Funkcial. Ekvac. **48** (2005), pp. 247 – 271.
- [8] Senba, T., Nonlinear Anal. **70** (2009), pp. 2549 – 2562.
- [9] Souplet, Ph. and Weissler, F. B., Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **20**(2003) 213 – 235.