

スケール不変な消散項を持つ波動方程式の解の散乱オーダー

戌亥 隆恭

(大阪大学 理学研究科)

第 172 回神楽坂解析セミナー 2021 年 5 月 22 日 (土)

本講演は、水谷治哉氏 (大阪大学) との共同研究に基づく。

1 スケール不変な消散項を持つ波動方程式

本研究では、以下のスケール不変な消散項を持つ波動方程式の解の振る舞いについて考察する。

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \frac{\mu_1}{1+t} \partial_t u + \frac{\mu_2}{(1+t)^2} u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (\text{DW})$$

ここで、 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ とし、 $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ とする。

Wirth[4, 5] および do Nascimento–Wirth[3] によって、 $\mu := \frac{\mu_1(2-\mu_1)}{4} + \mu_2 \geq 0$ のときは、或る関数 $\vec{u}_+ \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ が存在して、(DW) の解 u は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(1+t)^{\frac{\mu}{2}} \vec{u}(t) - \mathcal{W}(t) \vec{u}_+\|_{\dot{H}^1 \times L^2} = 0, \quad (1.1)$$

を満たすことが示された。ここで、 $\mathcal{W}(t)$ は通常の波動方程式の解作用素で、 $\vec{u}(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ とする。この結果は以下のように解釈することができる。すなわち、Liouville 変換 $v := (1+t)^{\frac{\mu}{2}} u(t)$ によって v が満たす方程式は時間減衰係数の質量項を持つ Klein-Gordon 方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + \frac{\mu}{(1+t)^2} v = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ (v(0), \partial_t v(0)) = (v_0, v_1) = (u_0, \mu_1 u_0/2 + u_1), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (\text{KG})$$

と書き直せるため、時間無限大でこの質量項の影響が無視でき、波動方程式の解に散乱するというように解釈することができる。そこで本研究では、この方程式 (KG) の質量項の減衰係数が具体的に与えられていることから、解の散乱における時間のオーダーを明らかにする。

2 主結果

方程式 (KG) の解の散乱オーダーに関して、次の結果を得た。以下、 $\text{Re } \nu := \frac{1}{2} \sqrt{1-4\mu}$ とする。 $\mu \geq 0$ ならば $\text{Re } \nu \geq 1/2$ であることに留意する。

Theorem 2.1. $\mu \geq 0$ とする。このとき、或る $\vec{v}_+ \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ が存在して、

$$\|\vec{v}(t) - \mathcal{W}(t) \vec{v}_+\|_{\dot{H}^1 \times L^2} \lesssim \mu (\|v_{10}\|_{L^2} + \|v_1\|_{L^2}) \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2} + \text{Re } \nu}, & \mu \neq 1/4, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}} (1 + \log(1+t)), & \mu = 1/4, \end{cases}$$

が成り立つ.

この結果より, Liouville 変換の逆を行うことによって, 方程式 (DW) に関して,

Corollary 2.2. $\mu \geq 0$ とする. このとき, 或る $\vec{v}_+ \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ が存在して,

$$\begin{aligned} & \left\| u(t) - (1+t)^{-\frac{\mu_1}{2}} (\mathcal{W}(t)\vec{v}_+)_1 \right\|_{\dot{H}^1} \\ & \lesssim \mu (\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu - \frac{\mu_1}{2}}, & \mu \neq 1/4, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{2}} (1 + \log(1+t)), & \mu = 1/4, \end{cases} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_t u(t) - (1+t)^{-\frac{\mu_1}{2}} (\mathcal{W}(t)\vec{v}_+)_2 \right\|_{L^2} \\ & \lesssim (\mu + |\mu_1|) (\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu - \frac{\mu_1}{2}}, & \mu \neq 1/4, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{2}} (1 + \log(1+t)), & \mu = 1/4, \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $(\mathcal{W}(t)\vec{v}_+)_j$ は $\mathcal{W}(t)\vec{v}_+$ の第 j 成分を表す.

3 その他の結果

本研究のアイデアは非線形方程式にも用いることができる. 実際, エネルギー臨界な非線形項を持つ方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \frac{\mu_1}{1+t} \partial_t u + \frac{\mu_2}{(1+t)^2} u = \lambda |u|^{\frac{4}{d-2}} u, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (\text{NLDW})$$

に関しても, 解の散乱およびそのオーダーを求めることに成功した [1]. ここで, $\mu_1 \in [0, \infty)$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $d \geq 3$, $\lambda = \pm 1$ とし, $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ とする.

また, 線形方程式 (DW) に対して, 初期値の空間減衰が早い場合, すなわち $(u_0, u_1) \in H^1 \cap L^r \times L^2 \cap L^r$ である場合には, 解の漸近オーダーが良くなることも示された [2].

時間が許せば, これらの結果についても紹介したい.

参考文献

- [1] T. Inui, H. Mizutani, *Scattering and asymptotic order for the wave equations with the scale-invariant damping and mass*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 28, 8 (2021).
- [2] T. Inui, H. Mizutani, *Remarks on asymptotic order for the linear wave equation with the scale-invariant damping and mass with L^r -data*, to appear in Proc. AMS.
- [3] W. N. do Nascimento, J. Wirth, *Wave equations with mass and dissipation*, Adv. Differential Equations, **20** (2015), no. 7-8, 661–696.
- [4] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation I. Non-effective dissipation*, J. Differential Equations **222** (2006), no. 2, 487–514.
- [5] J. Wirth, *Scattering and modified scattering for abstract wave equations with time-dependent dissipation*, Adv. Differential Equations **12** (2007), no. 10, 1115–1133.