

Diffusion wave phenomena and L^p decay estimates of solutions of compressible viscoelastic system ¹

石垣 祐輔 (いしがき ゆうすけ)

東京工業大学理学院数学系

e-mail: ishigaki.y.aa@m.titech.ac.jp

1 序

3次元全空間における圧縮性粘弾性流体方程式の初期値問題を考える:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) - \nu \Delta v - (\nu + \nu') \nabla \operatorname{div} v + \nabla P(\rho) = \beta^2 \operatorname{div}(\rho F^\top F), \\ \partial_t F + v \cdot \nabla F = \nabla v F, \\ \operatorname{div}(\rho^\top F) = 0, \rho \det F = 1, \\ (\rho, v, F)|_{t=0} = (\rho_0, v_0, F_0), \operatorname{div}(\rho_0^\top F_0) = 0, \rho_0 \det F_0 = 1 \end{cases}$$

ここで、未知関数は密度 $\rho = \rho(x, t)$, 速度場 $v = (v^1(x, t), v^2(x, t), v^3(x, t))$, 変形テンソル $F = (F^{jk}(x, t))_{1 \leq j, k \leq 3}$ ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$) である. $P(\rho)$ は ρ の滑らかな関数で, $P'(1) > 0$ を仮定し, $\gamma \equiv \sqrt{P'(1)}$ とする. ν, ν', β は $\nu > 0, 2\nu + 3\nu' \geq 0, \beta > 0$ を満たす定数であり, ν, ν' は粘性係数, β は弾性波の伝播速度を表す. 形式的に $\beta = 0$ とすると, (1.1) は通常の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に帰着される.

本講演では (1.1) の静止定常解 $(1, 0, I)$ 周りの解の時間大域的挙動について考える. ここで I は 3×3 単位行列である.

通常の圧縮性 Navier-Stokes 方程式については, Hoff-Zumbrun[1] により静止定常解 $(1, 0)$ 周りの解の L^p ノルムの評価と漸近展開が証明され, 解の圧縮部分が音波と粘性拡散による拡散波現象により半線形放物型方程式に分類される非圧縮性 Navier-Stokes 方程式とは異なるふるまいを明らかにした:

$$\|(\phi(t), m(t))\|_{L^p} \leq \begin{cases} C(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}, & 1 \leq p < 2, \\ C(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}, & 2 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

$$\left\| \left((\phi(t), m(t)) - \left(0, \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-\nu|\xi|^2 t} \mathcal{P}(\xi) \hat{m}_0(\xi) \right) \right) \right) \right\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}, \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

ここで $(\phi(t), m(t)) = (\rho(t) - 1, \rho(t)v(t))$, $\mathcal{P}(\xi) = I - \frac{\xi^\top \xi}{|\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ であり, 記号 $\hat{\cdot}$, $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ Fourier 変換, Fourier 逆変換を表す.

圧縮性粘弾性流体方程式の静止定常解まわりの解の時間大域的挙動の研究については Hu-Wu[2], Li-Wei-Wao[5] などにより L^p ノルムの減衰レートを $2 \leq p \leq \infty$ の場合で導出し, 熱方程式の解と同じ減衰を示している:

$$\|u(t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

ここで $u(t) = (\phi(t), w(t), G(t)) = (\rho(t), w(t), F(t)) - (1, 0, I)$ である. しかし, この時間減衰評価は最適ではなく, 圧縮性粘弾性流体方程式のもつ双曲型方程式の側面が反映されていなかった.

¹本研究は特別研究員奨励費 (課題番号:19J10056) の助成を受けたものである.

2 主結果

$u_0 = u(0) = (\phi_0, w_0, G_0)$ とおく. 本講演では圧縮性粘弾性流体がもつ拡散波現象を明瞭にし, [2, 5] の結果を改良・拡張できたことを次の主定理で報告する.

定理 2.1. ([3, 4]) $1 \leq p \leq \infty$ とする. あるベクトル場 X_0 を用いて $(I + G_0)^{-1} = \nabla X_0$ とする. このとき $\|u_0\|_{H^4} + \|u_0\|_{L^1} \ll 1$ と $u_0 \in W^{2,1}$ を満たす初期値 $u_0 = (\phi_0, w_0, G_0)$ に対し, 以下の $u(t)$ に関する上からの評価が成立する:

$$\|u(t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}(\|u_0\|_{W^{2,1}} + \|u_0\|_{H^4}), \quad t \geq 0.$$

さらに, ある正定数 c_0, c_1, η, c が存在して

$$|\hat{\phi}_0(\xi)| \geq c_0, |\hat{m}_0(\xi), \hat{G}_0(\xi) - {}^T \hat{G}_0(\xi)| \leq c_1 |\xi|^\eta, \quad |\xi| \ll 1$$

を満たせば, 下からの評価が成り立つ:

$$\|u(t)\|_{L^p} \geq c(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}, \quad t \gg 1.$$

ここで, $(m_0, G_0) = (\rho_0 m_0, \rho_0 F_0 - I)$ である.

証明の方針 本講演では, [4] で導出した L^1 評価の手法に沿って説明する. 物質座標変換により, G は変位ベクトル ψ を用いて $G = \nabla \psi + O(|\nabla \psi|^2)$, $|\nabla \psi| \ll 1$ と書けるため, G は $\|G\|_{L^p} \leq C\|\nabla \psi\|_{L^p}$ と評価できる. 次に, 非線形の束縛条件 $\rho \det F = 1$ より, ϕ は $\phi = -\operatorname{div} \psi + O(|\nabla \psi|^2)$, $|\nabla \psi| \ll 1$ を満たすので, $\|\phi\|_{L^p} \leq C(\|\operatorname{div} \psi\|_{L^p} + \|\nabla \psi\|_{L^p})$ と評価できる. ϕ と G の代わりに $-\operatorname{div} \psi$ と $\nabla \psi$ の挙動に着目すればよいので, u の代わりに $U = (\tilde{\phi}, w, \tilde{G}) = (-\operatorname{div} \psi, w, \nabla \psi)$ に関する以下の問題を考えればよい:

$$\begin{cases} \partial_t U + LU = N(U), \\ \tilde{\phi} + \operatorname{tr} \tilde{G} = 0, \quad \tilde{G} = \nabla \psi, \\ U|_{t=0} = U_0 = (\tilde{\phi}_0, w_0, \tilde{G}_0), \end{cases} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{div} & 0 \\ \gamma^2 \nabla & -\nu \Delta - (\nu + \nu') \nabla \operatorname{div} & -\beta^2 \operatorname{div} \\ 0 & -\nabla & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $N(U) = (N_1(U), N_2(U), N_3(U))$ は非線形項で, $N_1(U) = -\operatorname{tr} N_3(U)$, $N_3(U) = -\nabla(w \cdot \nabla \psi)$ である. 線形の束縛条件 $\tilde{\phi} + \operatorname{tr} \tilde{G} = 0$, $\tilde{G} = \nabla \psi$ により, 線形化半群 $e^{-tL} U_0$ は L^1 で非有界かつ時間に依存しない項を消去できる. さらに, 非線形項 $N(U)$ も $\tilde{\phi}$, $\tilde{G}$ と同様な線形条件を満たすため, 積分方程式を介した解析を有効にして上からの評価を得ることができる. 下からの評価は, Hu-Wu[2] で示された L^2 ノルムの下からの評価と補間不等式よりしたがう.

参考文献

- [1] D. Hoff and K. Zumbrun, Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), pp. 603–676.
- [2] X. Hu and G. Wu, Global existence and optimal decay rates for three-dimensional compressible viscoelastic flows, SIAM J. Math. Anal., **45** (2013), pp. 2815–2833.
- [3] Y. Ishigaki, Diffusion wave phenomena and L^p decay estimates of solutions of compressible viscoelastic system, J. Differential Equations, **269** (2020), pp. 11195–11230.
- [4] Y. Ishigaki, On L^1 estimates of solutions of compressible viscoelastic system, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst.
- [5] Y. Li, R. Wei, and Z. Yao, Optimal decay rates for the compressible viscoelastic flows, J. Math. Phys., **57**, 111506, (2016).