時間離散化法を用いた, 慣性項をもつ 非局所フェーズフィールドシステムの解の存在証明

来間 俊介　(東京理大・理)*

1. 序

本研究ではフェーズフィールドシステム

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases}
(\alpha(\theta))_t + \ell\varphi_t - \eta\Delta\theta = f & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\zeta\varphi_{tt} + \varphi_t + A\varphi + \beta(\varphi) + \pi(\varphi) = \ell\theta & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\partial_\nu\theta = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \\
(\alpha(\theta))(0) = \alpha(\theta_0),\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi_t(0) = v_0 & \text{in } \Omega
\end{cases}
$$

について考える．ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1,2,3)$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, $T > 0$, $\ell, \eta > 0$, $\zeta \in \{0,1\}$, $\alpha : D(\alpha) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は極大単調な関数, $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は作用素, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は極大単調な関数, $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は (一般には単調でない) 関数, $f, \theta_0, \varphi_0, v_0$ は与えられた関数である．以下の場合は既に研究されている:

(Case 1) $\zeta = 0$, $\alpha(\theta) = \theta$, $A\varphi = -\Delta\varphi$ (see e.g., [4, 1, 10, 9]),

(Case 2) $\zeta = 0$, $\alpha(\theta) = \ln\theta$, $A\varphi = -\Delta\varphi$ (see e.g., [2, 3]),

(Case 3) $\zeta = 1$, $\alpha(\theta) = \theta$, $A\varphi = -\Delta\varphi$ (see e.g., [11, 12, 7]),

(Case 4) $\zeta = 1$, $\alpha(\theta) = \theta$, $A\varphi = a(\cdot)\varphi - J*\varphi$ (see e.g., [6, 8])

(ここで, $a(x) := \int_\Omega J(x-y)\,dy$, $(J*\varphi)(x) := \int_\Omega J(x-y)\varphi(y)\,dy$ である)．しかし, $\zeta = 1$, $\alpha(\theta) = \ln\theta$, $A\varphi = a(\cdot)\varphi - J*\varphi$ の場合はまだ研究されていないようである．

本研究では, $\zeta = 1$, $\alpha(\theta) = \ln\theta$, $A\varphi = a(\cdot)\varphi - J*\varphi$ の場合を考え, (P) の解の存在を示す (解の定義については講演で紹介する)．また, $J, \beta, \pi, f, \theta_0, \varphi_0, v_0$ に対する条件を与える．

(C1) $J(-x) = J(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$, $\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega |J(x-y)|\,dy < \infty$.

(C2) $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は極大単調な関数であり, かつ局所 Lipschitz 連続な関数である．また, 下半連続かつ凸である非負値関数 $\widehat{\beta}$ が存在し, $\widehat{\beta}(0) = 0$, $\beta = \partial\widehat{\beta}$ を満たす．ここで, $\partial\widehat{\beta}$ は $\widehat{\beta}$ の劣微分である．

(C3) π は Lipschitz 連続な関数である．

(C4) $f \in L^2(\Omega\times(0,T)) \cap L^1(0;T;L^\infty(\Omega))$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$, $\ln\theta_0 \in L^2(\Omega)$, $\varphi_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Remark 1.1. (Case 3), (Case 4) では, 慣性項 φ_{tt} が原因で, 慣性項がない (Case 1), (Case 2) と比べて $\beta(\varphi)$ に関する評価を得ることが難しくなる．(Case 3) では, 不等式 $|\beta''(r)| \le C_\beta(1+|r|)$ ($C_\beta > 0$: 定数) を仮定し, φ に関する $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$-評価の導出, 埋め込み $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ の連続性により, $\beta(\varphi)$ に関する評価が得られる．一方, (Case 4) では, φ に関する正則性が下がってしまい, (Case 3) と同じ方法では

*e-mail: shunsuke.kurima@gmail.com

$\beta(\varphi)$ に関する評価は得られない. (Case 4) では, φ_0, v_0 の有界性を仮定し, θ に関する $L^2(0,T;H^2(\Omega))$-評価の導出や埋め込み $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ の連続性などにより, φ に関する $L^\infty(\Omega \times (0,T))$-評価を得ることができ, $\beta(\varphi)$ に関する評価が得られる. ところが, 本研究 ($\zeta = 1$, $\alpha(\theta) = \ln\theta$, $A\varphi = a(\cdot)\varphi - J * \varphi$) では, θ に関する正則性が下がってしまい, θ に関する $L^2(0,T;H^2(\Omega))$-評価を得ることが困難になる. つまり, (Case 4) と同じ方法では $\beta(\varphi)$ に関する評価は得られない.

2. (P) の解の存在証明の大まかな方針

[3] を参考にし, (P) の近似問題

$$
(\mathrm{P})_\varepsilon \quad \begin{cases} (\varepsilon\theta_\varepsilon + \ln\theta_\varepsilon)_t + \ell(\varphi_\varepsilon)_t - \eta\Delta\theta_\varepsilon = f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ (\varphi_\varepsilon)_{tt} + (\varphi_\varepsilon)_t + a(\cdot)\varphi_\varepsilon - J * \varphi_\varepsilon + \beta(\varphi_\varepsilon) + \pi(\varphi_\varepsilon) = \ell\theta_\varepsilon & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \partial_\nu \theta_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ (\varepsilon\theta_\varepsilon + \ln\theta_\varepsilon)(0) = \varepsilon\theta_0 + \ln\theta_0,\ (\varphi_\varepsilon)(0) = \varphi_0,\ (\varphi_\varepsilon)_t(0) = v_0 & \text{in } \Omega \end{cases}
$$

を考える. ここで, $\varepsilon \in (0,1]$ である. 一方, (Case 2) において, [2, 3] では時間離散化法が用いられている. 本研究では, [2, 3, 8] で用いられている時間離散化法を参考にして, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の存在を示すために次の問題を考察する: $n = 0, ..., N-1$ (N は自然数) に対して

$$
(\mathrm{P})_n \quad \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \ell\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{h} - \eta\Delta\theta_{n+1} = f_{n+1} & \text{in } \Omega, \\ z_{n+1} + v_{n+1} + a(\cdot)\varphi_n - J * \varphi_n + \beta(\varphi_{n+1}) + \pi(\varphi_{n+1}) = \ell\theta_{n+1} & \text{in } \Omega, \\ z_{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{h},\ v_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{h} & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu\theta_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

ここで, $h = \frac{T}{N}$, $u_j := \varepsilon\theta_j + \ln\theta_j$ $(j = 0, 1, ..., N)$, $f_k := \frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{kh} f(s)\,ds$ $(k = 1, ..., N)$ である. まず, Banach の不動点定理などによって $(\mathrm{P})_n$ の解の存在を示す. 次に, 極限移行 $(h \searrow 0)$ により $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の存在を示すために, $(\mathrm{P})_n$ を次のように書き換える: $n = 0, ..., N-1$ (N は自然数), $t \in [nh, (n+1)h]$ に対して

$$
\widehat{u}_h(t) := u_n + \frac{u_{n+1} - u_n}{h}(t - nh),
$$
$$
\widehat{\varphi}_h(t) := \varphi_n + \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{h}(t - nh),
$$
$$
\widehat{v}_h(t) := v_n + \frac{v_{n+1} - v_n}{h}(t - nh)
$$

と定め, $n = 0, ..., N-1$ (N は自然数), $t \in (nh, (n+1)h]$ に対して

$$
\overline{u}_h(t) := u_{n+1},\ \overline{\theta}_h(t) := \theta_{n+1},\ \overline{\varphi}_h(t) := \varphi_{n+1},\ \underline{\varphi}_h(t) := \varphi_n,
$$
$$
\overline{v}_h(t) := v_{n+1},\ \overline{z}_h(t) := z_{n+1},\ \overline{f}_h(t) := f_{n+1}
$$

と定めると, $(\mathrm{P})_n$ を以下の問題に書き換えることができる:

$$
(\mathrm{P})_h \qquad
\begin{cases}
(\widehat{u}_h)_t + \ell(\widehat{\varphi}_h)_t - \eta\Delta\overline{\theta}_h = \overline{f}_h & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\overline{z}_h + \overline{v}_h + a(\cdot)\underline{\varphi}_h - J * \underline{\varphi}_h + \beta(\overline{\varphi}_h) + \pi(\overline{\varphi}_h) = \ell\overline{\theta}_h & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\overline{z}_h = (\widehat{v}_h)_t,\ \overline{v}_h = (\widehat{\varphi}_h)_t & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\overline{u}_h = \varepsilon\overline{\theta}_h + \ln\overline{\theta}_h & \text{in } \Omega\times(0,T), \\
\partial_\nu\overline{\theta}_h = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \\
\widehat{u}_h(0) = \varepsilon\theta_0 + \ln\theta_0,\ \widehat{\varphi}_h(0) = \varphi_0,\ \widehat{v}_h(0) = v_0 & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

極限移行 $(h \searrow 0)$ により $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の存在を示す. さらに, 極限移行 $(\varepsilon \searrow 0)$ により (P) の解の存在を示す.

Remark 2.1. (Case 4) では, 解の存在を示すのに, θ に関する $L^2(0,T;H^2(\Omega))$-評価を得ることが鍵となる. 一方, 本研究 ($\zeta = 1$, $\alpha(\theta) = \ln\theta$, $A\varphi = a(\cdot)\varphi - J*\varphi$) では, 解の存在を示すのに

$$
\int_0^t \theta(s)\,ds \text{ に関する } L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\text{-評価} \quad \Bigl(\approx h \max_{1\le m\le N} \Bigl\| \sum_{n=0}^{m-1} \theta_{n+1} \Bigr\|_{H^2(\Omega)} \text{ の評価}\Bigr)
$$

を得ることが鍵となる. また, もう 1 つの鍵は, $(\mathrm{P})_h$ に対する Cauchy の収束条件の導出である:

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{\varphi}_h - \widehat{\varphi}_\tau\|_{C([0,T];H)} + \|\widehat{v}_h - \widehat{v}_\tau\|_{C([0,T];H)} + \|\overline{v}_h - \overline{v}_\tau\|_{L^2(0,T;H)} \\
&\le C(h^{1/2} + \tau^{1/2}) + C\|\widehat{v}_h - \widehat{v}_\tau\|_{L^2(0,T;V^*)}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

また, 同様にして, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ に対する Cauchy の収束条件を導出することもできる:

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma\|_{C([0,T];H)} + \|v_\varepsilon - v_\gamma\|_{C([0,T];H)} + \|v_\varepsilon - v_\gamma\|_{L^2(0,T;H)} \\
&\le C\|v_\varepsilon - v_\gamma\|_{L^2(0,T;V^*)}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Remark 2.2. 本研究では, 解の一意性はまだ示せていない. 今後の課題として取り組みたいと思う.

参考文献

[1] G. Canevari, P. Colli, *Solvability and asymptotic analysis of a generalization of the Caginalp phase field system*, Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), 1959–1982.

[2] M. Colturato, *Well-posedness and longtime behavior for a singular phase field system with perturbed phase dynamics*, Evol. Equ. Control Theory **7** (2018), 217–245.

[3] P. Colli, M. Colturato, *Global existence for a singular phase field system related to a sliding mode control problem*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **41** (2018), 128–151.

[4] C.M. Elliott, S. Zheng, *Global existence and stability of solutions to the phase-field equations, in "Free Boundary Problems"*, Internat. Ser. Numer. Math. **95**, 46–58, Birkhäuser Verlag, Basel, (1990).

[5] G. Gilardi, E. Rocca, *Well-posedness and long-time behaviour for a singular phase field system of conserved type*, IMA J. Appl. Math. **72** (2007), 498–530.

[6] M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *A nonlocal phase-field system with inertial term*, Quart. Appl. Math. **65** (2007), 451–469.

[7] S. Kurima, *Time discretization of an initial value problem for a simultaneous abstract evolution equation applying to parabolic-hyperbolic phase-field systems*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. **54** (2020), 977–1002.

[8] S. Kurima, *Time discretization of a nonlocal phase-field system with inertial term*, submitted, arXiv:2102.00860 [math.NA].

[9] A. Miranville, A.J. Ntsokongo, *On anisotropic Caginalp phase-field type models with singular nonlinear terms*, J. Appl. Anal. Comput. **8** (2018), 655–674.

[10] T. Miyasita, *Global existence and exponential attractor of solutions of Fix-Caginalp equation*, Sci. Math. Jpn. **77** (2015), 339–355.

[11] H. Wu, M. Grasselli, S. Zheng, *Convergence to equilibrium for a parabolic-hyperbolic phase-field system with Neumann boundary conditions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **17** (2007), 125–153.

[12] H. Wu, M. Grasselli, S. Zheng, *Convergence to equilibrium for a parabolic-hyperbolic phase-field system with dynamical boundary condition*, J. Math. Anal. Appl. **329** (2007), 948-976.