

曲がった薄膜領域上の Navier–Stokes 方程式に関する特異極限問題

三浦達彦 (Tatsu-Hiko MIURA)*¹

京都大学大学院理学研究科

1 導入

与えられた 2 次元閉曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ と十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して 3 次元の曲がった薄膜領域を $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon/2\}$ で定める. Ω_ε は内側の境界 Γ_ε^0 と外側の境界 Γ_ε^1 を持ち, 境界全体を $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^0 \cup \Gamma_\varepsilon^1$ と書くことにする. Ω_ε 上で「流体が領域の内外に出入りせず, 境界上で摩擦力を受けながら滑る (摩擦力のない場合を含む)」という (Navier の) 滑り境界条件を課した次の非圧縮 Navier–Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \text{div } u^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon \cdot n_\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty), \\ 2\nu P_\varepsilon D(u^\varepsilon) n_\varepsilon + \gamma_\varepsilon u^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\nu > 0$ は ε によらない粘性係数, n_ε は Γ_ε の外向き単位法線ベクトル, $P_\varepsilon = I_3 - n_\varepsilon \otimes n_\varepsilon$ は Γ_ε の接平面への直交射影, $D(u^\varepsilon) = \{\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T\}/2$ は歪み速度テンソルである. また与えられた非負定数 $\gamma_\varepsilon^0, \gamma_\varepsilon^1$ に対して Γ_ε 上の摩擦係数 γ_ε を $\gamma_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon^i} = \gamma_\varepsilon^i, i = 0, 1$ で定める.

本講演では $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限における (1) の解 u^ε の解の挙動について考える. このような問題は特異極限問題の一種であり, Navier–Stokes 方程式については平面領域の周りの平らな領域 [4, 2] や薄い球殻 [5] の場合に研究されており, 一般の曲がった薄膜領域の場合は本研究が初めてである.

2 記号

主定理を述べるためにいくつかの記号を定める. 閉曲面 Γ の外向き単位法線ベクトルを n で表す. $\Omega_\varepsilon = \{y + rn(y) \mid y \in \Gamma, r \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)\}$ と書けることに注意して, ベクトル場 $u: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して膜の厚さ方向への積分平均 Mu とその Γ に対する接線方向成分 $M_\tau u$ を

$$Mu(y) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} u(y + rn(y)) dr, \quad M_\tau u(y) = Mu(y) - \{Mu(y) \cdot n(y)\}n(y), \quad y \in \Gamma$$

で定める. また $L_\sigma^2(\Omega_\varepsilon) = \{u \in L^2(\Omega_\varepsilon)^3 \mid \text{div } u = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon, u \cdot n_\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon\}$ を Ω_ε 上の L^2 ソレノイダル空間とする. $P = I_3 - n \otimes n$ を Γ の接平面への直交射影として Γ 上の接勾配 ∇_Γ と表面発散 div_Γ を $\nabla_\Gamma \eta = P \nabla \eta$ および $\text{div}_\Gamma v = \text{tr}[\nabla_\Gamma v]$ ($\eta: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$) により定める. また Γ 上の接ベクトル場 v に対して v のそれ自身に沿った共変微分を Γ における歪み速度テンソルを

$$\bar{\nabla}_v v = P(v \cdot \nabla_\Gamma)v, \quad D_\Gamma(v) = P \left(\frac{\nabla_\Gamma v + (\nabla_\Gamma v)^T}{2} \right) P$$

により定める. Γ 上の接ベクトル場のなす関数空間を $\mathcal{X}(\Gamma, T\Gamma) = \{v \in \mathcal{X}(\Gamma)^3 \mid v \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma\}$ と書く. ただし $\mathcal{X} = L^2, H^1$ とする.

*¹ e-mail: t.miura@math.kyoto-u.ac.jp

3 主結果

本講演の主定理は次の通りである（方程式 (1) に外力項がある場合は [3] を参照）。

定理 ([3]). $\Gamma, \gamma_\varepsilon^0, \gamma_\varepsilon^1$, および $u_0^\varepsilon \in L_\sigma^2(\Omega_\varepsilon) \cap H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ に対する適切な仮定の下, 次の条件が成り立つと仮定する:

- (a) ある $c > 0$ と $\varepsilon_2, \alpha \in (0, 1)$ が存在し, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ に対して $\|u_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c\varepsilon^{-1+\alpha}$.
- (b) ある $v_0 \in L^2(\Gamma, T\Gamma)$ が存在して $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\tau u_0^\varepsilon = v_0$ weakly in $L^2(\Gamma, T\Gamma)$.
- (c) $i = 0, 1$ に対してある $\gamma^i \geq 0$ が存在して $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon^i / \varepsilon = \gamma^i$.

このときある $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2]$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ に対して (1) の時間大域的な強解

$$u^\varepsilon \in C([0, \infty), H^1(\Omega_\varepsilon)^3) \cap L_{loc}^2([0, \infty), H^2(\Omega_\varepsilon)^3)$$

が存在する. また $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Mu^\varepsilon \cdot n = 0$ strongly in $C([0, \infty); L^2(\Gamma))$ が成り立つ. さらにある

$$v \in C([0, \infty); L^2(\Gamma, T\Gamma)) \cap L_{loc}^2([0, \infty); H^1(\Gamma, T\Gamma))$$

が存在し, 任意の $T > 0$ に対して $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\tau u^\varepsilon = v$ weakly in $L^2(0, T; H^1(\Gamma, T\Gamma))$ が成り立ち, かつ v は次の方程式の唯一の弱解である:

$$\begin{cases} \partial_t v + \bar{\nabla}_v v - 2\nu P \operatorname{div}_\Gamma [D_\Gamma(v)] + (\gamma^0 + \gamma^1)v + \nabla_\Gamma q = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, \infty), \\ \operatorname{div}_\Gamma v = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, \infty), \\ v|_{t=0} = v_0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (2)$$

特に $\gamma^0 = \gamma^1 = 0$ のとき, 粘性項の変形により極限方程式 (2) は次のように書ける:

$$\partial_t v + \bar{\nabla}_v v - \nu \{\Delta_H v + 2\operatorname{Ric}(v)\} + \nabla_\Gamma q = 0, \quad \operatorname{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, \infty).$$

ここで Δ_H は Γ 上の Hodge ラプラシアン, Ric は Γ の Ricci 曲率であり, 上記の方程式は [1, 6] で導入された抽象的な Riemann 多様体上の Navier–Stokes 方程式に一致する.

参考文献

- [1] D. G. Ebin and J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 102–163.
- [2] D. Iftimie, G. Raugel, and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations in thin 3D domains with Navier boundary conditions*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), no. 3, 1083–1156.
- [3] T.-H. Miura, *Navier–Stokes equations in a curved thin domain, Part III: thin-film limit*, Adv. Differential Equations **25** (2020), no. 9-10, 457–626.
- [4] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Differential Equations **1** (1996), no. 4, 499–546.
- [5] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*, Optimization methods in partial differential equations (South Hadley, MA, 1996), Contemp. Math., vol. 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 281–314.
- [6] M. E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 9-10, 1407–1456.