Stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials and general nonlinearities

宮本 安人　(東大数理)*

本講演は，生駒典久氏 (慶應義塾大学) との共同研究 [1] に基づく．
L^2-ノルム一定の制約条件下における次の最小化問題を考える：

$$e(\alpha) := \inf\left\{E(u) |\ u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}),\ \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \alpha\right\},$$

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(|u|)dx.$$

ここで，$\alpha > 0$ であり, $N \geq 1$, $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ とする．F に関する仮定を述べる：

(F1) $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(0) = 0$.

(F2) $f(s) \in \mathbb{R}$ for $s \in \mathbb{R}$, $f(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}f(z)$ for $\theta \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{C}$.

(F3) $\lim_{s\to 0} f(s)/s = 0$.

(F4) $\lim_{s\to\infty} f(s)/|s|^{p_c} = 0$, where $p_c := 1 + 4/N$.

(F5) $f(s)$ is locally Hölder continuous with exponent $\nu \in (0, 1)$ in $\mathbb{R}$, $f(s) > 0$ for $s > 0$ and there exists $\delta_1 > 0$ such that $f(s)/s$ is nondecreasing in $(0, \delta_1)$.

(F6) If $N \geq 5$, then $\liminf_{s\to 0} f(s)/|s|^{p_{sg}} > 0$, where $p_{sg} := N/(N-2)$. Here, $2^* = 2N/(N-2)$ if $N \geq 3$, and $2^* = \infty$ if $N = 1, 2$.

また，V に関する仮定を述べる：

(V1) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N)$, $0 \not\equiv V(x) \leq 0$ and $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$.

(V2) If $N \geq 5$, then

$$V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \ \text{ and } \ \nabla V(x) \cdot x \leq \frac{(N-2)^2}{2|x|^2} \text{ for a.e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

この問題はLions [2] により本格的な研究が始まり，これまで様々な拡張がなされてきたが，多くは $f(u) = |u|^{p-1}u$ の場合であった．柴田 [3] によって $V \equiv 0$ かつ一般的な f の場合が研究され，$e(\alpha)$ の達成可能性と α の関係について調べられた．その結果，次を満たす $\alpha_{0,\infty} \geq 0$ が存在し，

$$e(\alpha)\begin{cases} = 0 & \text{if } 0 \leq \alpha \leq \alpha_{0,\infty}, \\ < 0 & \text{if } \alpha > \alpha_{0,\infty}, \end{cases}$$

さらに $0 \leq \alpha < \alpha_{0,\infty}$ ならば達成されず，$\alpha > \alpha_{0,\infty}$ ならば達成されることが証明された（$\alpha = \alpha_{0,\infty}$ の場合に達成可能となるための f に関する十分条件も調べられている）.

本研究では，非正のポテンシャル項 V を持ち一般の f の場合に $e(\alpha)$ の達成可能性を考察し，次の結果を得た：

定理 A [1, Theorem A] (F1)–(F5) と (V1) を仮定する．さらに，(F6) か (V2) を仮定する．このとき $\alpha_0 \in [0, \alpha_{0,\infty}]$ が存在して次の (i) と (ii) が成立する：

* e-mail: miyamoto@ms.u-tokyo.ac.jp

(i) $\alpha > \alpha_0$ ならば，$e(\alpha) < 0$ となり，全ての最小化列は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で強収束部分列を持つ．従って，$e(\alpha)$ は達成され，全ての最小化元からなる集合 S_α はプレコンパクトとなり次が成立する：

$$e(\alpha) < e(\beta) + e_\infty(\alpha - \beta) \quad \text{for all } \beta \in [0, \alpha).$$

さらに次の (F7) と (F8) を仮定する：

(F7) There exist $K > 0$ and $1 < p < 2^* - 1$ such that $|f(z_1) - f(z_2)| \leq K(1 + |z_1| + |z_2|)^{p-1}|z_1 - z_2|$ for z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Here, $2^* = 2N/(N-2)$ if $N \geq 3$, and $2^* = \infty$ if $N = 1, 2$.

(F8) There exist $L > 0$ and $1 < p < p_c$ such that $F(|s|) \leq L(|s|^2 + |s|^{p+1})$ for $s \in \mathbb{R}$.

このとき非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t U = -\Delta U + V(x)U - f(U) \quad \text{for} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

に対して S_α は軌道安定である．

(ii) $0 < \alpha_0$ かつ $0 < \alpha < \alpha_0$ ならば，$e(\alpha) = 0$ となり，$e(\alpha)$ は達成されない．

[3] と同様に，$\alpha_0 > 0$ または $\alpha_0 = 0$ となる状況についても考察し，次の結果を得た：
定理B [1, Theorem B] (F1)–(F4) と (V1) を仮定する．このとき次の (i) と (ii) が成立する：

(i) さらに $f(s) \geq 0$ in $[0, s_0]$ となる $s_0 > 0$ が存在すると仮定し，次の (V3) も仮定する：

(V3) $$\inf_{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}=1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2\right) dx < 0.$$

このとき $\alpha_0 = 0$．さらに $N = 1, 2$ のとき，(V1) より (V3) が自動的に成り立つので $\alpha_0 = 0$.

(ii) $N \geq 3$ で，(F1)–(F4) と (V1) に加えて次の (F9) を仮定する：

(F9) $\limsup_{s\downarrow 0} F(s)/s^{p_c+1} < \infty$.

このとき $\alpha_1 > 0$ が存在し次を満たす：各 $\alpha \in (0, \alpha_1)$ に対し，$V(x) \geq -c_\alpha|x|^2$ for $|x| > 0$ は $\alpha_0 \geq \alpha > 0$ を意味するような $c_\alpha > 0$ がとれる．

Concentration-compactness lemma を用い，dichotomy の可能性を排除することが証明の中心である．そのため，dichotomy が起こると仮定し，楕円型方程式の解に対する interaction estimate を利用して矛盾を導く．

参考文献

[1] N. Ikoma and Y. Miyamoto, *Stable stansing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials and general nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **59** (2020), Paper No. 48, 20 pp.

[2] P. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 223–283.

[3] M. Shibata, *Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term*, Manuscripta. Math. **143** (2014), 221–237.