優2次のポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式の基本解の非正則性

中橋 渉 (東京理科大学)

本研究では、以下のシュレーディンガー方程式における初期値問題の基本解、すなわち、ディラックのデルタ関数を初期値とする解の非正則性を考える。

$$(S) \quad i\partial_t u(t, x) = -\frac{1}{2}\Delta u(t, x) + V(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\partial_t u = \partial u / \partial t$ 、 $\partial_{x_j} u = \partial u / \partial x_j$ ($j = 1, \dots, d$)、 $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ である。

先行研究 [1] では、次のことが示されている：

- 2次よりも増大度が遅いポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式に対して基本解が C^∞ 級である。
- $d = 1$ の場合、時間に依存しない2次よりも増大度が速いポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式に対して基本解がどのような点のどのように小さな近傍においても C^1 級でない。

本研究では、空間次元が多次元かつ球対称なポテンシャルに対する基本解の滑らかさについて、部分的な結果を得た。

以下、ポテンシャル V は時間に依存しないとし、次の仮定を課す。

仮定. V は $C^3(\mathbb{R}^d)$ に属する球対称な実数値関数で、 $V(x) = \tilde{V}(|x|)$ となる $\tilde{V}(r) \in C^3([0, \infty))$ に対し、 $[R, \infty)$ ($R > 0$) 上で以下を満たすとす。

- (1) $\tilde{V}''(r) > 0$,
- (2) $r\tilde{V}'(r) \geq 2c\tilde{V}(r) > 0$ ($c > 1$),
- (3) $\tilde{V}^{(j)}(r) = O\left(\frac{1}{r}\right)\tilde{V}^{(j-1)}(r)$ as $r \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2, 3$).

主定理. $d = 3$ とする。点列 $\{\lambda_n\}$ は $\lambda_n > 0$ かつ $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる発散列であり、 $L^2([0, \infty))$ に属する実数値関数 f_n で $\|f_n\|_{L^2([0, \infty))} = 1$ かつ以下を満たすとす。

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}f_n''(r) + \tilde{V}(r)f_n(r) = \lambda_n f_n(r), \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

ここで、球対称な関数 $u_n \in L^2(\mathbb{R}^3)$ を、 $u_n(x) = (\sqrt{2\pi r})^{-1} f_n(r)$ ($r = |x|$) とし、 $\sum_n e^{-i\lambda_n t} u_n(x) \overline{u_n(y)}$ を超関数の意味で定まる関数とする。このとき、 $\sum_n e^{-i\lambda_n t} u_n(x) \overline{u_n(y)}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 内のどのような点のどのように小さい近傍においても C^2 級でない。

注. u_n は $-\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ の球対称な固有関数である。元のシュレーディンガー方程式の基本解は、 $\sum_n e^{-i\lambda_n t} u_n(x) \overline{u_n(y)}$ と他の固有関数 $v_m(x)$ からできる $\sum_m e^{-i\mu_m t} v_m(x) \overline{v_m(y)}$ の形の関数の和になっている。

参考文献

- [1] Yajima, K., Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Commun. Math. Phys., **181**, 605–629 (1996).
- [2] 谷島 賢二, シュレーディンガー方程式 I, II, 朝倉書店, (2014).