

Upper and lower bounds of lifespan of solutions to nonlinear wave equations in one space dimension

西野智則（東京理科大学）

本論文では、1次元における非線形波動方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2)u(x, t) = H(u)(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \partial_t u(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

の解 u が有限時間で爆発する場合に、 u の最大存在時間 T_ε の評価について考察する。

ここで、 $a \geq -1, p > 1$ に対して、

$$H(u)(x, t) := \frac{|u(x, t)|^{p-1}u(x, t)}{(1+x^2)^{\frac{a+1}{2}}}$$

とし、 ε は十分小さい正の数で、 $f \in C^2(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$ は共に奇関数で十分速く減衰するとする。

$$K[f, g](x, t) := \frac{1}{2} \left\{ f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \right\}, \quad L[H(u)](x, t) := \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{|x-(t-s)|}^{x+(t-s)} H(u)(y, s) dy \right\} ds$$

として、積分方程式

$$u(x, t) = K[\varepsilon f, \varepsilon g](x, t) + L[H(u)](x, t), \quad (x, t) \in [0, \infty)^2$$

の解 u が有限時間で爆発する場合を考えればよい。

[4, 第5節] の手法を応用し、[3, Sections 2, 3] では $p > 1, pa > 1$ のとき、 $T_\varepsilon = \infty$ となることを示している。また、 $a \geq -1, p > 1$ で f, g が $\mathbb{R}$ 上奇関数でない場合における T_ε の評価が、[5, Theorems 1.1, 1.2] で与えられている。

本研究では、 $p > 1, pa \leq 1$ で f, g が $\mathbb{R}$ 上奇関数である場合における T_ε の評価を導出し、次の定理 1, 2 を得た。

定理 1. $0 < a < 1, p > 1, pa \leq 1$ とする。 $\nu > \frac{1}{p}$ のとき、 $(f, g) \in Y(\nu)$ ($Y(\nu)$ の定義は発表時に説明する) であれば、ある正の定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(a, p, \nu, f, g), c = c(a, p, \nu, f, g)$ が存在し、任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して、

$$T_\varepsilon \geq \begin{cases} \exp\{c\varepsilon^{-p(p-1)}\} & (pa = 1), \\ c\varepsilon^{-\frac{p(p-1)}{1-pa}} & (pa < 1). \end{cases}$$

定理 2. $-1 \leq a < 1, p > 1, pa \leq 1$ とする。 $[0, \infty)$ 上で $f \equiv 0, g \geq 0$ となるとき、ある $\delta \in (0, 1]$ が $\int_{\frac{\delta}{2}}^\delta g(y) dy > 0$ をみたせば、ある正の定数 $C = C(a, p, g, \delta)$ が存在し、任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ に対して、

$$T_\varepsilon \leq \begin{cases} \exp\{C\varepsilon^{-p(p-1)}\} & (pa = 1), \\ C\varepsilon^{-\frac{p(p-1)}{1-pa}} & (pa < 1). \end{cases}$$

証明は、[1] 及び [2, Sections 2.1, 2.3], [3, Sections 2, 3], [4, 第5, 6節] の手法に基づく。

参考文献

- [1] S. Katayama and A. Matsumura, “Sharp lower bound for the lifespan of systems of semilinear wave equations with multiple speeds”, J. Math. Kyoto Univ. **45-2** (2005), 391–403.
- [2] H. Kubo and M. Ohta, “On the Global Behavior of Classical Solutions to Coupled Systems of Semilinear Wave Equations”, in Operator Theory : Advances and Applications **159**, Birkhäuser Verlag Basel (2005), 113–211.
- [3] H. Kubo, A. Osaka and M. Yazici, “Global Existence and Blow-Up for Wave Equations with Weighted Nonlinear Terms in One Space Dimension”, Interdisciplinary Information Sciences **19** (2013), 143–148.
- [4] 鈴木彩子, 「空間 1 次元における非線形波動方程式の解の大域存在と爆発」(修士論文), 埼玉大学 (2010).
- [5] K. Wakasa, “The lifespan of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension”, Hokkaido Mathematical Journal **46** (2017), 257–276.