

Instability of traveling waves for Korteweg-de Vries type equation with double power nonlinearity

岡田 侑己 (東京理科大学)

次の KdV 型方程式について考える:

$$\partial_t u = \partial_x (-\partial_x^2 u - au^p - bu^q), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (\text{KdV})$$

ここで, $u = u(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, $a, b > 0$ とし, p, q は 2 以上の自然数とする.

また, $c > 0$ とし, 次の定常問題を考える:

$$-\phi'' + c\phi - a\phi^p - b\phi^q = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{SP})$$

任意の $c > 0$ に対して, (SP) の正值偶関数解 ϕ_c が一意的に存在する. このとき, $\phi_c(x - ct)$ は (KdV) の解となるが, これを進行波解という.

さらに, (SP) に対応する作用汎関数 $S_c: H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$S_c(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx - \frac{a}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx - \frac{b}{q+1} \int_{\mathbb{R}} u^{q+1} dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R})$$

と定め, $d(c) = S_c(\phi_c)$ とする.

[1] の結果から, (KdV) の進行波解 $\phi_c(x - ct)$ は $d''(c) > 0$ のときに安定, $d''(c) < 0$ のときに不安定であることが知られている. しかし, $d''(c) = 0$ のときの安定性を調べることは一般には難しい. 本研究の目的は, $d''(c) = 0$, $d'''(c) \neq 0$ のときの (KdV) の進行波解の安定性を調べることである.

[3] では, 同様な場合の非線形 Schrödinger 方程式に対して, 安定性が調べられている. しかし, 歪対称作用素 ((KdV) では ∂_x にあたる部分) が全単射であることを用いているため, 同様に議論することはできない. 特に, $\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \partial_c \phi_c(z) dz$ と, ある条件を満たす関数 $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 不安定性を示す上で重要な役割を果たす汎関数 $A(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x + y(t)) \Psi(x) dx$ は, $u(t)$ の正則性が足りないために定義できない.

本研究では, [2] による単調性補題を用いることで, 上記の問題点を解決し, 次の結果を得た:

定理. $d''(c_0) = 0$, $d^{(3)}(c_0) \neq 0$ と仮定する. このとき, (KdV) の進行波解 $\phi_{c_0}(x - c_0 t)$ は不安定である.

参考文献

- [1] J. L. Bona, P. E. Souganidis, and W. A. Strauss, *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **411** (1987), 395–412.
- [2] F. Merle, *Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 555–578.
- [3] M. Ohta, *Instability of bound states for abstract nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 90–110.