

Critical mass decay for the dissipative nonlinear Schrödinger equation in the Gevrey class

佐藤 拓也 (東北大学大学院・理学研究科)¹

ここでは以下の消散型非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題を考察する.

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \lambda |u|^2 u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ は $\text{Im } \lambda < 0$ を満たすため, 初期値問題 (1) は消散型の先験評価を満たし, 解の L^2 -ノルム (総質量) は時間に関して単調に減少する. 外力に p -次の非線型項を持つ消散型非線型 Schrödinger 方程式に対しては, $p > 1 + 2/n$ のもとで解の L^2 -ノルムが下に有界となることが示されている ([6]). 一方, Kita-Shimomura [3] は初期値問題 (1) において, 非線型冪の次数が 3 以下となる場合に解の L^2 -減衰を示しており, Hayashi-Li-Naumkin [1] はその L^2 -減衰オーダーを得た. すなわち, 空間 1 次元消散型非線型 Schrödinger 方程式 (1) において, 3 次の外力冪は解が L^2 -減衰するための臨界冪となる. 近年, Hoshino [2], Ogawa-Sato [4] は初期値問題 (1) において, H^r -正則性 ($r > 0$) を持つ解の L^2 -減衰評価が

$$(2) \quad \|u(t)\|_{L^2} \leq C_\varepsilon (\log t)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2r+1)} + \varepsilon}$$

で与えられることを示した. ここで $C_\varepsilon > 0$ は正数 ε を 0 に近づけたとき, 無限大に発散する定数である. ここでは特に, 臨界冪 $p = 3 (= 1 + 2/n)$ を持つ初期値問題 (1) に対して, 減衰評価 (2) の r を無限大に大きくした場合に相当する, 解の L^2 -減衰の結果を述べる. 任意の $s \geq 1$ に対して, 以下の Gevrey 空間を定める.

$$G_v^s(\mathbb{R}) \equiv \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \|f\|_{G_v^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^s} \|\partial_x^k f\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

$s = 1$ のとき, $G_v^s(\mathbb{R})$ は実解析的なクラスとなり, $0 < s_1 < s_2 \leq 1$ に対しては包含関係 $G_v^1(\mathbb{R}) \subset G_v^{s_2}(\mathbb{R}) \subset G_v^{s_1}(\mathbb{R}) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ が成り立つ. ここで, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ は空間遠方で消滅する無限階微分可能なクラスである.

定理 1 (Sato [5]). $s \geq 1$ とする. このとき, 正数 ε_0 が存在し, 初期値 $u_0 \in G_v^s(\mathbb{R})$ が条件

$$\|\partial_x u_0\|_{G_v^s} + \|xu_0\|_{G_v^s} \leq \varepsilon_0$$

を満たせば, 初期値問題 (1) の解 $u \in C([0, \infty), G_v^s(\mathbb{R}))$ が一意に存在する. さらに, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の時刻 $t \geq e^e$ に対して, 以下を満たす:

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C(\log \log t)^{\frac{s}{2}} (\log t)^{-\frac{1}{2}}.$$

REFERENCES

- [1] Hayashi, N., Li, C., Naumkin, P., Adv. Math. Phys. (2016), Art. ID 3702738, 7.
- [2] Hoshino, G., J. Math. Phys. **60** (2019), 111504, 11.
- [3] Kita, N., Shimomura, A., J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 39-64.
- [4] Ogawa, T., Sato, T., Nonlinear Differ. Equ. Appl. **27** (2020), Paper No. 18.
- [5] Sato, T., Arch. Math. **115** (2020), 575-588.
- [6] Sato, T., *Lower bound estimate for the dissipative nonlinear Schrödinger equation*, (2020), preprint.

¹E-mail: takuya.sato.a7@tohoku.ac.jp