1120509

3 次元一般化 Zakharov-Kuznetsov 方程式の孤立波解の不安定性

数学専攻　谷口 凜汰
研究指導教員　太田 雅人
研究指導補助教員　深谷 法良

次の 3 次元一般化 Zakharov-Kuznetsov 方程式

$$\partial_t u + \partial_{x_1}(\Delta u + u^p) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

について考える. ただし, $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ である.
ここで p は 2 以上の整数であり, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は未知関数である.
(1) では,

$$-\Delta Q + Q - Q^p = 0 \tag{2}$$

の正値球対称解 Q について $Q_c(x) = c^{1/p-1}Q(c^{1/2}x)$ として, $u(t,x) = Q_c(x_1 - ct, x')$ が孤立波解となる. ただし, $x' = (x_2, x_3)$.
2 次元の L^2 優臨界な一般化 Zakharov-Kuznetsov 方程式

$$\partial_t u + \partial_{x_1}(\Delta u + u^p) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad p \in \mathbb{N}_{\geq 4} \tag{3}$$

については (ここでは $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$), de Bouard[3] により, 孤立波解 $Q_c(x_1 - ct, x_2)$ の不安定性が示された. また Farah, Holmer and Roudenko[1] により, 単調性を用いた証明が与えられた.
3 次元の場合, $p \geq 3$ のとき, L^2 優臨界となるが, de Bouard[3] により 3 次元 $p = 3, 4$ での不安定性が示されている. 本研究では, Farah, Holmer and Roudenko[1] に基づいた方法で 3 次元 L^2 優臨界での不安定性を考える. また, Grünrock[2] により $p = 3$ での局所適切性が分かっているので, $p = 3$ として考える.
$x, y \in \mathbb{R}^3, f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ に対して, $T(y)f(x) = f(x+y)$ とする.
また, $U_\alpha = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \inf_{y \in \mathbb{R}^3} \|T(y)u - Q\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq \alpha\}$ とする.
さらに, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_n = 1 + \frac{1}{n}$ とし, $x \in \mathbb{R}^3$ において, $u_{0,n}(x) = \lambda_n^{\frac{3}{2}} Q(\lambda_n x)$ とする.
本研究では次のような定理を得た.

定理. *$p = 3$ とする. u_n を $u_{0,n}$ を初期値とする (1) の解とする.*
このとき, $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n = T_n(u_{0,n})$ が存在し, $u_n(T_n) \notin U_\alpha$ が成り立つ.

これは $p = 3$ における (1) の孤立波解 $Q(x_1 - t, x')$ が不安定であることを表している.

参考文献

[1] L.G. Farah, J. Holmer and S. Roudenko, Instability of solitons-revisited, II: The supercritical Zakharov-Kuznetsov equation. Nonlinear dispersive waves and fluids, 89–109, Contemp. Math., 725, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019

[2] A. Grünrock, A remark on the modified Zakharov-Kuznetsov equation in three space dimensions. Math. Res. Lett. 21 (2014), no. 1, 127–131.

[3] A. de Bouard, Stability and instability of some nonlinear dispersive solitary waves in higher dimension. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126 (1996), no. 1, 89–112.